B7. Вычисления и преобразования

ⓘ *Немного полезной информации*

Вспомним, как производить простейшие вычисления с обыкновенными дробями. Чтобы перемножить дроби, нужно умножить их числители и записать результат в числитель, а потом перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{25}{42}.$$

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число, то на него обычно делят каждый из них и называют это «сократить дробь».

$$\frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}.$$

Иногда сокращение выполняют во время умножения дробей.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}.$$

Если дроби были смешанные (с выделенной целой частью), то нужно их перевести в обыкновенные (состоящие только из числителя и знаменателя). Для этого целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и результат записывают в числитель, а знаменатель оставляют прежним.

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5},$$

$$3\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{19}{5} \cdot \frac{5}{19} = 1.$$

Чтобы перевести неправильную дробь (числитель больше знаменателя) в смешанную («выделить целую часть»), нужно числитель разделить на знаменатель с остатком. Тогда неполное частное будет целой частью, остаток будет числителем, а знаменатель останется тем же.

$$\frac{19}{5} = 19 : 5 = 3(\text{остаток } 4),$$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}.$$

Чтобы перевести обыкновенную дробь в десятичную, надо числитель разделить на знаменатель.

$$\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0{,}24.$$

Десятичную дробь можно перевести в обыкновенную. Например: 0,201 читается как «ноль целых двести одна тысячная». Пишем $\frac{201}{1000}$.

Чтобы умножить обыкновенную дробь на десятичную, нужно или обыкновенную перевести в десятичную, или десятичную в обыкновенную.

$$\frac{2}{5} \cdot 0{,}25 = 2 : 5 \cdot 0{,}25 = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}100 = 0{,}1,$$

$$\frac{2}{5} \cdot 0{,}25 = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{100} = \frac{50}{500} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно в этой дроби поменять местами числитель со знаменателем и умножить число на полученную дробь.

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Чтобы целое число записать в виде обыкновенной дроби, нужно записать его со знаменателем 1.

$$15 : 3\frac{6}{7} = \frac{15}{1} : \frac{3 \cdot 7 + 6}{7} = \frac{15}{1} : \frac{27}{7} = \frac{15}{1} \cdot \frac{7}{27} = \frac{15 \cdot 7}{1 \cdot 27} = \\ = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 9} = \frac{35}{9}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Если у дробей есть целая часть, то нужно сначала сложить или вычесть целые части.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6},$$

$$3\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5} = 3 + 2\frac{4+3}{5} = 5\frac{7}{5} = 6\frac{2}{5}.$$

Можно при сложении и вычитании дробей сразу перевести все дроби в обыкновенные (без целой части).

$$3\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} + \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{19}{5} + \frac{13}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5},$$

$$-\frac{3}{8} - 2\frac{1}{8} = -\left(\frac{3}{8} + 2\frac{1}{8}\right) = -2\frac{4}{8} = -2\frac{1}{2}.$$

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители так, что новый знаменатель будет равен наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем.

   $$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{3^{\backslash 3}}{8} + \frac{5^{\backslash 2}}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9+10}{24} = \frac{19}{24}.$$

2. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем.

   $$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{3^{\backslash 12}}{8} + \frac{5^{\backslash 8}}{12} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{36}{96} + \frac{40}{96} = \\ = \frac{36+40}{96} = \frac{76}{96} = \frac{19}{24}.$$

Разберём ещё пример сложения и пример вычитания дробей.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2}{5}^{\backslash 4}+\frac{3}{4}^{\backslash 5}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20},$$

$$2\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3+2}{3}-\frac{4\cdot 4+3}{4}=\frac{8}{3}-\frac{19}{4}=\frac{8}{3}^{\backslash 4}-\frac{19}{4}^{\backslash 3}=$$

$$=\frac{32}{12}-\frac{57}{12}=-\frac{57-32}{12}=-\frac{25}{12}=-2\frac{1}{12}.$$

Задачи с решениями

1. Найдите значение выражения $\left(-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}\right)\cdot 9{,}6$.

Решение.

1) $-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{4\cdot 3+2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{14}{3}=$

$$=-\frac{7}{8}^{\backslash 3}+\frac{14}{3}^{\backslash 8}=-\frac{21}{24}+\frac{112}{24}=\frac{112-21}{24}=\frac{91}{24}.$$

2) $\frac{91}{24}\cdot 9{,}6=\frac{91}{24}\cdot 9\frac{6}{10}=\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}.$

Сокращаем 96 и 24, $96:24=4$,

$$\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}=\frac{91\cdot 4}{10}=\frac{364}{10}=36\frac{4}{10}=36{,}4.$$

Ответ: 36,4.

Действия со степенями

Немного полезной информации

Вспомним основные формулы.

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$

$$a^n:a^m=a^{n-m};$$

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m};$$

$$(ab)^m=a^m\cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

Задачи с решениями

2. Найдите значение выражения $5^7\cdot 5^{10}:5^{15}$.

Решение.

$5^7\cdot 5^{10}:5^{15}=5^{7+10-15}=5^2=25.$

Ответ: 25.

3. Найдите значение выражения $\frac{x^{18}\cdot x^7}{x^{20}}$ при $x=8$.

Решение.

$$\frac{x^{18}\cdot x^7}{x^{20}}=x^{18+7-20}=x^5=8^5=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=64\cdot 64\cdot 8=$$

$=32\,768.$

Ответ: 32 768.

4. Найдите значение выражения $2^9\cdot 11^6:22^6$.

Решение.

$$2^9\cdot 11^6:22^6=\frac{2^9\cdot 11^6}{22^6}=\frac{2^9\cdot 11^6}{(2\cdot 11)^6}=\frac{2^9\cdot 11^6}{2^6\cdot 11^6}=\frac{2^9}{2^6}=$$

$=2^{9-6}=2^3=8.$

Ответ: 8.

5. Найдите значение выражения $121^2\cdot 3^2:99$.

Решение.

$$121^2 \cdot 3^2 : 99 = \frac{\left(11^2\right)^2 \cdot 3^2}{11 \cdot 3^2} = \frac{3^2 \cdot 11^4}{3^2 \cdot 11} = 11^{4-1} = 11^3 = 1331.$$

Ответ: 1331.

6. Найдите значение выражения $2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}}$.

Решение.

$$2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{12}-6+3-\sqrt{12}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

7. Найдите значение выражения $0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}}$.

Решение.

$$0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}} = \left(0{,}4 \cdot 5^2 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} = \left(0{,}4 \cdot 25 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \left(10 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{9}} = \left(10^9\right)^{\frac{1}{9}} = 10^1 = 10.$$

Ответ: 10.

8. Найдите значение выражения $9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}}$.

Решение.

$$9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot \left(9^2\right)^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{10}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{5}{7}} = 9^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 9^{\frac{7}{7}} = 9.$$

Ответ: 9.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}}$ при $x = 5$.

Решение.

$$\frac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}} = x^{(-10)+(-8)-(-19)} = x^{-18+19} = x^1 = x = 5.$$

Ответ: 5.

Действия с многочленами

Немного полезной информации

Вспомним основные правила действий с многочленами.

Распределительный закон:

$$a \cdot (b + c - k) = ab + ac - ak.$$

Этот закон позволяет не только раскрывать скобки, но и упрощать вычисления.

$38 \cdot 46 + 38 \cdot 254 - 38 \cdot 200 = 38(46 + 254 - 200) = = 38 \cdot 100 = 3800.$

Переместительные законы:

$$a - b + c - k = a + c - b - k,$$

$$a \cdot b : c \cdot k = a \cdot b \cdot k : c.$$

Если в примере написана алгебраическая сумма (то есть встречаются только знаки «+» и «−»), то слагаемые можно поменять местами, но перемещать их нужно вместе с тем знаком, который стоит перед слагаемым.

Например, $38 - 126 + 236 - 141 = 236 - 126 + 38 - 141 = = 110 + 38 - 141 = 148 - 141 = 7.$

Если в примере есть только действия умножение и деление (и нет скобок), то есть встречаются только знаки «·» и «:», то числа можно поменять местами, но перемещать их опять-таки нужно вместе с тем знаком, который стоит перед числом.

Например, $64 : 9 \cdot 45 : 16 = 64 : 16 \cdot 45 : 9 = 4 \cdot 45 : 9 = = 45 : 9 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$

Задачи с решениями

10. Найдите значение выражения $3x(3x - 15) - 9x^2 + 8x + 11$ при $x = 200$.

Решение.

Упростим данное выражение.

$3x(3x-15)-9x^2+8x+11=(3x)^2-15\cdot 3x-9x^2+8x+11=$
$=9x^2-45x-9x^2+8x+11=-37x+11.$

Подставим значение переменной $x=200$.

$-37x+11=-37\cdot 200+11=-7400+11=-7389.$

Ответ: -7389.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{(7a)^2-7a}{7a^2-a}$.

Решение.

$$\frac{7a(7a-1)}{a(7a-1)}=\frac{7a}{a}=7.$$

Ответ: 7.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{3\left(3x^3\right)^2\cdot(5y)^3}{(15x^2y)^3}$.

Решение.

$$\frac{3\left(3x^3\right)^2\cdot(5y)^3}{(15x^2y)^3}=\frac{3\cdot 3^2\left(x^3\right)^2\cdot 5^3y^3}{15^3\left(x^2\right)^3y^3}=\frac{3^3x^6\cdot 5^3y^3}{3^3\cdot 5^3x^6y^3}=1.$$

Ответ: 1.

13. Найдите значение выражения $\dfrac{3\left(k^3\right)^8+13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2}$.

Решение.

$$\frac{3\left(k^3\right)^8+13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2}=\frac{3k^{24}+13k^{24}}{16k^{24}}=\frac{16k^{24}}{16k^{24}}=1.$$

Ответ: 1.

14. Найдите значение выражения $\dfrac{25x^2-9}{5x+3}-5x$.

Решение.

$$\frac{25x^2-9}{5x+3}-5x=\frac{25x^2-9-5x(5x+3)}{5x+3}=$$
$$=\frac{25x^2-9-25x^2-15x}{5x+3}=-\frac{15x+9}{5x+3}=-\frac{3(5x+3)}{5x+3}=-3.$$

Ответ: -3.

15. Найдите значение выражения

$(25a^2-4)\cdot\left(\dfrac{1}{5a-2}-\dfrac{1}{5a+2}\right)$.

Решение.

$$(25a^2-4)\cdot\left(\frac{1}{5a-2}-\frac{1}{5a+2}\right)=$$
$$=(5a-2)(5a+2)\cdot\left(\frac{5a+2}{(5a-2)(5a+2)}-\frac{5a-2}{(5a-2)(5a+2)}\right)=$$
$$=(5a-2)(5a+2)\frac{5a+2-(5a-2)}{(5a-2)(5a+2)}=$$
$$=(5a-2)(5a+2)\frac{4}{(5a-2)(5a+2)}=4.$$

Ответ: 4.

16. Найдите $\dfrac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $t(x)=\left(x+\dfrac{5}{x}\right)\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$.

Решение.

$$t\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}+5x\right)\left(\frac{5}{x}+x\right)=t(x),$$
$$\frac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{t(x)}{t(x)}=1.$$

Ответ: 1.

17. Найдите $k(b)+k(5-b)$, если $k(b)=\dfrac{b(5-b)}{b-2{,}5}$ при $b\neq 2{,}5$.

Решение.

$k(5-b)=\dfrac{(5-b)(5-(5-b))}{5-b-2{,}5}=\dfrac{(5-b)b}{2{,}5-b}=-k(b)$.

$k(b)+k(5-b)=k(b)-k(b)=0$.

Ответ: 0.

18. Найдите $\dfrac{x}{y}$, если $\dfrac{6x-7y}{7x+6y}=13$.

Решение.

$\dfrac{6x-7y}{7x+6y}=13$, делим числитель и знаменатель на y.

$\dfrac{6\cdot\frac{x}{y}-7}{7\cdot\frac{x}{y}+6}=13$,

$6\cdot\dfrac{x}{y}-7=13\left(7\cdot\dfrac{x}{y}+6\right)$,

$6\cdot\dfrac{x}{y}-7=91\cdot\dfrac{x}{y}+78$,

$85\cdot\dfrac{x}{y}+85=0$,

$\dfrac{x}{y}=-1$.

Ответ: -1

19. Найдите $\dfrac{2x+5y+9}{x+2y+4}$, если $\dfrac{x}{y}=2$.

Решение.

Так как $\dfrac{x}{y}=2$, то $x=2y$. Подставим $2y$ вместо x в выражение $\dfrac{2x+5y+9}{x+2y+4}$.

$\dfrac{4y+5y+9}{2y+2y+4}=\dfrac{9y+9}{4y+4}=\dfrac{9(y+1)}{4(y+1)}=\dfrac{9}{4}=2{,}25$.

Ответ: 2,25

20. Найдите значение выражения $\dfrac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy}$.

Решение.

$\dfrac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy}=\dfrac{9x^2+y^2-(9x^2+6xy+y^2)}{2xy}=$

$=\dfrac{9x^2+y^2-9x^2-6xy-y^2}{2xy}=-\dfrac{6xy}{2xy}=-3$.

Ответ: -3.

21. Найдите значение выражения $\dfrac{15abc-(-3cab)}{9bca}$.

Решение.

$\dfrac{15abc-(-3cab)}{9bca}=\dfrac{15abc+3abc}{9abc}=\dfrac{18abc}{9abc}=2$.

Ответ: 2.

22. Найдите значение выражения $\dfrac{13a^8b^4-\left(3a^4b^2\right)^2}{a^8b^6}$ при $b=4$.

Решение.

$$\frac{13a^8b^4-(3a^4b^2)^2}{a^8b^6}=\frac{13a^8b^4-9a^8b^4}{a^8b^6}=\frac{4a^8b^4}{a^8b^6}=\frac{4a^8b^4}{a^8b^6}=$$

$$=\frac{4}{b^2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

23. Найдите значение выражения $4p(x)-8x+4$, если $p(x)=2x-6$.

Решение.

$4p(x)-8x+4=4(2x-6)-8x+4=8x-24-8x+4=-20.$

Ответ: -20.

24. Найдите значение выражения $x+2y+6z$, если $3x+y=10$, $5y+18z=2$.

Решение.

Сложим левые и правые части выражений $3x+y=10$ и $5y+18z=2$. Получим $3x+6y+18z=12$. Делим на 3, получим $x+2y+6z=4$.

Ответ: 4.

25. Найдите значение выражения $3\big(k(3x)-2k(x+7)\big)-7x$, если $k(x)=x-14$.

Решение.

$k(3x)=3x-14. \quad k(x+7)=x+7-14=x-7.$

$3\big(k(3x)-2k(x+7)\big)-7x=3(3x-14)-2(x-7)-7x=$

$=9x-42-2x+14-7x=7x-28-7x=-28.$

Ответ: -28.

Действия с корнями

Немного полезной информации

Вспомним основные формулы.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m},\text{ если } k \text{ нечётно и}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{|a^m|},\text{ если } k \text{ чётно.}$$

$$\sqrt[n]{a+b}<\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

Задачи с решениями

26. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x>0$.

Решение.

$$\frac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}=\frac{14x^{\frac{1}{18}}x^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}}=14x^{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}}=14x^{\frac{1}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}}=$$

$$=14x^0=14.$$

Ответ: 14.

27. Найдите значение выражения: $\sqrt{406^2-294^2}$.

Решение.

$$\sqrt{406^2-294^2}=\sqrt{(406+294)(406-294)}=\sqrt{700\cdot 112}=$$

$$=\sqrt{7\cdot 100\cdot 7\cdot 16}=10\cdot 7\cdot 4=280.$$

Ответ: 280.

28. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}4}{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 1{,}4}{0{,}01}} = \frac{1{,}4}{0{,}1} = 14.$$

Ответ: 14.

29. Найдите значение выражения
$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}} - \sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right).$$

Решение.

$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}} - \sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) = \left(\sqrt{\frac{128}{5}} - \sqrt{\frac{72}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) =$$
$$= \left(8\sqrt{\frac{2}{5}} - 6\sqrt{\frac{2}{5}}\right) : \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right) : \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 2 : \frac{1}{3} = 6.$$

Ответ: 6.

30. Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{15}-17}$.

Решение.

$$\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{15}-17} = \frac{12-4\sqrt{15}+5}{4\sqrt{15}-17} = \frac{-4\sqrt{15}+17}{4\sqrt{15}-17} = -1.$$

Ответ: -1.

31. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2}$ при $5 < a < 7$.

Решение.

$\sqrt{(a-5)^2} + \sqrt{(a-7)^2} = |a-5| + |a-7|$. Так как $a > 5$, то $|a-5| = a-5$. Так как $a < 7$, то $|a-7| = 7-a$. Значит, $|a-5| + |a-7| = (a-5) + (7-a) = 7-5 = 2$.

Ответ: 2.

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{5}x\right)^2\cdot\sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{5}x\right)^2\cdot\sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}} = \frac{5x^2\cdot x^{\frac{4}{5}}}{x^{2,8}} = 5x^{2+\frac{4}{5}-2,8} = 5x^{2+0,8-2,8} =$$
$$= 5x^0 = 5.$$

Ответ: 5.

33. Найдите значение выражения $\dfrac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}} - 8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}} - 8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}} = \frac{17\sqrt[3\cdot18]{x} - 8\sqrt[6\cdot9]{x}}{3\sqrt[2\cdot27]{x}} =$$
$$= \frac{17\sqrt[54]{x} - 8\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}} = \frac{9\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}} = 3.$$

Ответ: 3.

34. Найдите $\dfrac{f(3-x)}{f(3+x)}$, если $f(x) = \sqrt[3]{x(6-x)}$ при $|x| \neq 3$.

Решение.

$f(3-x) = \sqrt[3]{(3-x)(6-(3-x))} = \sqrt[3]{(3-x)(3+x)}$,
$f(3+x) = \sqrt[3]{(3+x)(6-(3+x))} = \sqrt[3]{(3+x)(3-x)} =$
$= f(3-x)$, $\quad \dfrac{f(3-x)}{f(3+x)} = 1$.

Ответ: 1.

Логарифмические выражения

Немного полезной информации

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда
$$a^{\log_a x} = x.$$

Вспомним основные формулы.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\ y > 0;$$
$$\log_a(x^b) = b\log_a x;$$
$$\log_{a^b}(x) = \frac{1}{b}\log_a x;$$
$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a},\ x \neq 1.$$

Пусть $b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$. Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Задачи с решениями

35. Найдите значение выражения $\log_7 4{,}9 + \log_7 10$.

Решение.

$\log_7 4{,}9 + \log_7 10 = \log_7(4{,}9 \cdot 10) = \log_7 49 = \log_7(7^2) = 2.$

Ответ: 2.

36. Найдите значение выражения $6^{2\log_6 5}$

Решение.

$6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

37. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3}$.

Решение.

$8^{\log_2 3} = \left(2^3\right)^{\log_2 3} = 2^{3\cdot\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^3 = 3^3 = 27.$

Ответ: 27.

38. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 8$.

Решение.

$\log_{0,25} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \dfrac{1}{-2} \cdot 3\log_2 2 = -1{,}5.$

Ответ: $-1{,}5$.

39. Найдите значение выражения $\log_{16}\log_3 9$

Решение.

$\log_{16}\log_3 9 = \log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \dfrac{1}{4}\log_2 2 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

40. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15}$

Решение.

$\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15} = \log_{15^{-1}} 15^{0,5} = -1 \cdot 0{,}5 \cdot \log_{15} 15 = -0{,}5.$

Ответ: $-0{,}5$.

41. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7}$.

Решение.

$\dfrac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7} = \dfrac{\log_{25} 7}{\log_{25^2} 7} = \dfrac{\log_{25} 7}{\frac{1}{2}\log_{25} 7} = 1 : \dfrac{1}{2} = 2.$

Ответ: 2.

42. Найдите значение выражения $\log_{11} 3 \cdot \log_9 11$.

Решение.

$\log_{11} 3 \cdot \log_9 11 = \dfrac{\log_{11} 3}{\log_{11} 9} = \dfrac{\log_{11} 3}{\log_{11} 3^2} = \dfrac{\log_{11} 3}{2\log_{11} 3} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

43. Найдите значение выражения $105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4}$.

Решение.

$105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4} = 105 \cdot \log_4 4^{\frac{1}{3}} = 105 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \log_4 4 = 35.$

Ответ: 35.

44. Найдите значение выражения $(\log_2 32)\cdot(\log_3 27)$

Решение.

$(\log_2 32)\cdot(\log_3 27) = (\log_2 2^5)\cdot(\log_3 3^3) =$
$= (5\log_2 2)\cdot(3\log_3 3) = 5\cdot 3 = 15.$

Ответ: 15.

45. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}}$.

Решение.

$\dfrac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}} = 7^{\log_3 18-\log_3 2} = 7^{\log_3 (18:2)} = 7^{\log_3 9} = 7^{2} = 49.$

Ответ: 49.

46. Найдите значение выражения $(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)$.

Решение.

$(1-\log_3 15)(1-\log_5 15) = (\log_3 3-\log_3 15)(\log_5 5-\log_5 15) =$

$= \left(\log_3 \dfrac{3}{15}\right)\left(\log_5 \dfrac{5}{15}\right) = \left(\log_3 \dfrac{1}{5}\right)\left(\log_5 \dfrac{1}{3}\right) =$

$= (-\log_3 5)(-\log_5 3) = \dfrac{1}{\log_5 3}\cdot\log_5 3 = 1.$

Ответ: 1.

47. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 50}{2+\log_5 2}$.

Решение.

$\dfrac{\log_5 50}{2+\log_5 2} = \dfrac{\log_5 50}{\log_5 25+\log_5 2} = \dfrac{\log_5 50}{\log_5 25\cdot 2} = \dfrac{\log_5 50}{\log_5 50} = 1.$

Ответ: 1.

48. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0{,}25$.

Решение.

$\dfrac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0,25 = \log_5 4+\log_5 0,25 = \log_5(4\cdot 0,25) =$
$= \log_5 1 = 0.$

Ответ: 0.

49. Найдите значение выражения $\log^3_{\sqrt5} 25$.

Решение.

$\log^3_{\sqrt5} 25 = (\log_{\sqrt5} 25)^3 = \left(\log_{5^{0,5}} 5^2\right)^3 = \left(\dfrac{1}{0{,}5}\cdot 2\cdot\log_5 5\right)^3 =$

$= 4^3 = 64.$

Ответ: 64.

Тригонометрические выражения

50. Найдите значение выражения $\dfrac{32(\sin^2 18^\circ-\cos^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ}$.

Решение.

$\dfrac{32(\sin^2 18^\circ-\cos^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ} = \dfrac{-32(\cos^2 18^\circ-\sin^2 18^\circ)}{\cos 36^\circ} =$

$= \dfrac{-32(\cos 36^\circ)}{\cos 36^\circ} = -32.$

Ответ: -32.

51. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}$.

Решение.

$\dfrac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \dfrac{3\cos 35^\circ}{\sin(90^\circ-35^\circ)} = \dfrac{3\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 3.$

Ответ: 3.

52. Найдите значение выражения $14\sqrt6\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

$$14\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 14\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = 42.$$

Ответ: 42.

53. Найдите значение выражения $3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos 7\pi$.

Решение.

$$3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos 7\pi = 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6\pi+\pi) = \frac{9}{2}\cos\pi =$$

$$= -\frac{9}{2} = -4{,}5.$$

Ответ: $-4{,}5$.

54. Найдите значение выражения $\dfrac{16}{\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)\cos\frac{65\pi}{4}}$.

Решение.

$$\frac{16}{\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)\cos\frac{65\pi}{4}} = -\frac{16}{\sin\frac{29\pi}{4}\cos\frac{65\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{16}{\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(16\pi+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= -\frac{16}{-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{16}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 16 : \frac{1}{2} = 16\cdot 2 = 32.$$

Ответ: 32.

55. Найдите значение выражения $-5\sqrt{3}\cos(-390^\circ)$.

Решение.

$$-5\sqrt{3}\cos(-390^\circ) = -5\sqrt{3}\cos(390^\circ) =$$

$$= -5\sqrt{3}\cos(360^\circ+30^\circ) = -5\sqrt{3}\cos 30^\circ = -5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{-15}{2} = -7{,}5.$$

Ответ: $-7{,}5$.

56. Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750^\circ)$.

Решение.

$$4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750^\circ) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(750^\circ) =$$

$$= -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(720^\circ+30^\circ) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30^\circ = -4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -4.$$

Ответ: -4.

57. Найдите значение выражения $\dfrac{28\sin 316^\circ}{\sin 44^\circ}$.

Решение.

$$\frac{28\sin 316^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{28\sin(360^\circ-44^\circ)}{\sin 44^\circ} = \frac{28\sin(-44^\circ)}{\sin 44^\circ} =$$

$$= -\frac{28\sin 44^\circ}{\sin 44^\circ} = -28.$$

Ответ: -28.

58. Найдите значение выражения $\dfrac{12\,\mathrm{tg}\,168^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ}$.

Решение.

$$\frac{12\,\mathrm{tg}\,168^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = \frac{12\,\mathrm{tg}(180^\circ-12^\circ)}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = \frac{12\,\mathrm{tg}(-12^\circ)}{\mathrm{tg}\,12^\circ} =$$

$$= -\frac{12\,\mathrm{tg}\,12^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = -1.$$

Ответ: -1.

59. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2 112^\circ}$.

Решение.

$$\frac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2 112^\circ} = \frac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2(90^\circ + 22^\circ)} =$$
$$= \frac{6}{\sin^2 22^\circ + \cos^2(22^\circ)} = 6.$$

Ответ: 6.

60. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 17 - 1 = 16$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2}{3} + 2\dfrac{4}{5}\right) \cdot 4{,}5$.

2. Найдите значение выражения $3^{0{,}34} \cdot 27^{1{,}22}$.

3. Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}+1} \cdot 5^{1-\sqrt{3}}$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{3}a)^2 \cdot \sqrt[5]{a^4}}{5a^{2{,}8}}$ при $a > 0$.

5. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.

6. Найдите значение выражения $33 \cdot 7^{\log_7 8}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{17 \sin 13^\circ \cos 13^\circ}{\sin 26^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}{2\sin\alpha + 7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\left(3\dfrac{4}{5} + 1\dfrac{5}{6}\right) \cdot 3$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{0{,}48}}{4^{1{,}24}}$.

3. Найдите значение выражения $(9x^2 + 4y^2 - (3x - 2y)^2) : xy$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{2{,}35}}{a^{2{,}97} \cdot a^{1{,}38}}$ при $a = 2{,}5$.

5. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 5}$.

6. Найдите значение выражения $\log_2 \log_2 256$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{18(\sin^2 36^\circ - \cos^2 36^\circ)}{\cos 72^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos\alpha + \sin\alpha + 2}{2\sin\alpha + 10\cos\alpha + 4}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $3^{2\frac{1}{3}} \cdot 9^{1\frac{1}{3}}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2{,}1} \cdot \sqrt{1{,}4}}{\sqrt{6}}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-8}\cdot x^{6}}{x^{-3}}$ при $x=28$.

4. Найдите значение выражения $(9x^2-25)\cdot\left(\dfrac{1}{3x-5}-\dfrac{1}{3x+5}\right)$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{10}13}{\log_{10}\sqrt[7]{13}}$.

6. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $5\cos(\pi-\alpha)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $5^8\cdot 2^6:10^7$.

2. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^5\cdot x^6}{x^9}$ при $x=12$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{f(y)}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$, если $f(y)=\left(2y-\dfrac{3}{y}\right)\left(3y-\dfrac{2}{y}\right)$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 57}{\log_8 57}$.

6. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}5+\log_5 50$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin^2 35^\circ+\sin^2 125^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $4\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $77^8:11^7:7^6$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}}-\sqrt{5\frac{2}{5}}\right):\sqrt{0{,}6}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{6+\sqrt{35}}$.

4. Найдите значение выражения $(13-2x)(13+2x)+4x^2+5x-69$ при $x=68$.

5. Найдите значение выражения $\log_3 8\cdot\log_2 27$.

6. Найдите значение выражения $5^{\log_{25}64}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 13^\circ}{\sin 347^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=1,6$.

Вариант 6

1. Найдите значение выражения $\sqrt{565^2-452^2}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$.

3. Найдите $2g(y)-10y+3$, если $g(y)=5y-7$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(8x)^2-8x}{8x^2-x}$.

5. Найдите значение выражения $38\log_{25}\sqrt{5}$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{7}{3^{\log_3 8}}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,750^\circ$.

8. Найдите значение выражения
$\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+3\cos(\pi+\beta)}{\cos(\beta-\pi)}$.

B8. Производная и исследование функций

ⓘ *Немного полезной информации*

Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Функцию, имеющую производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в этой точке). Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Производная функции также является функцией.

Производной функции в точке называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Рассмотрим рисунок 1. Здесь $\Delta x = x - x_0$ — это приращение (изменение) аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции.

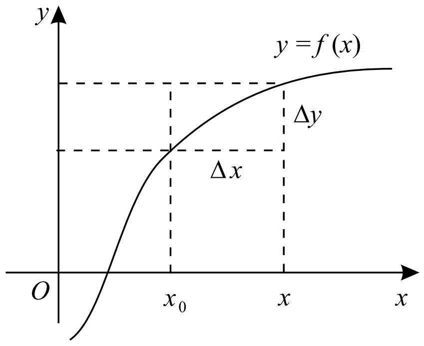


Рис. 1.

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Производные некоторых элементарных функций:

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const;$$
$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha = const;$$
$$(\sqrt{x}\,)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \ \ c - const;$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\bigl(g(x)\bigr), \ \ y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ где } u = g(x).$$

Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. Нужно помнить, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной (или, другими словами, тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox).

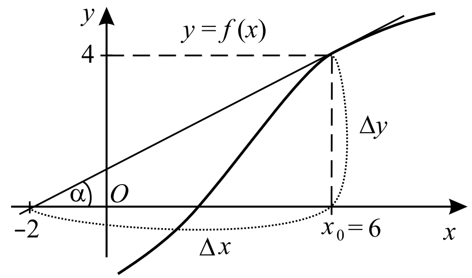


Рис. 2.

Например, на рисунке 2 $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}$.

Видим, что $\Delta y = 4$, $\Delta x = 8$. Тогда $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Обратите внимание, что Δy и Δx вместе с отрезком касательной образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике мы разделим Δy на Δx, то получим абсолютное значение производной. Знак производной мы можем определить тремя способами.

1-й способ.

Если точка принадлежит промежутку возрастания функции, то значение производной в этой точке положительно, а если — промежутку убывания, то значение производной отрицательно.

2-й способ.

Рассмотрим угол, образованный касательной к графику функции в некоторой точке, с осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно.

3-й способ.

Возьмём координаты произвольной точки касательной (x_1, y_1). Теперь рассмотрим любую точку касательной, абсцисса которой x_2 больше, чем абсцисса первой точки. Если при этом и её ордината y_2 больше y_1, то производная положительна, если меньше — производная отрицательна.

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны и что прямая, параллельная оси абсцисс Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Задачи с решениями

9. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

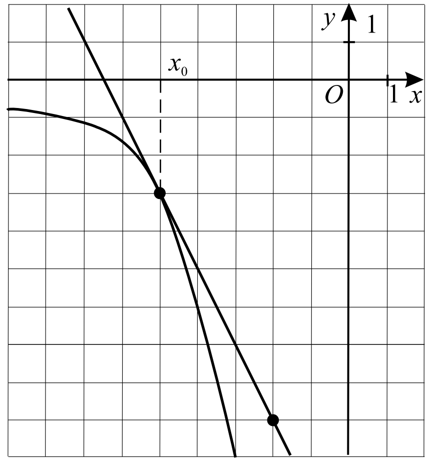


Рис. 3.

Решение.

По графику функции видно, что функция — убывающая, поэтому знак производной в точке касания «минус». Выберем две точки касательной. Например, $(-2; -9)$ и $(-5; -3)$. Разность их абсцисс $\Delta x = 3$, разность ординат $\Delta y = 6$. Делим Δy на Δx; получаем $6 : 3 = 2$, ставим знак «$-$».

Ответ: -2.

Применение производной к исследованию функций

Разберём решение некоторых задач, связанных с геометрическим смыслом производной.

10. Прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Так как прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 5$, то есть $k = 3$. Так как касательная проведена к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$, то значение производной в точке касания равно значению углового коэффициента касательной, то есть $y'(x) = 3$.

Найдём производную функции $y = x^2 + 2x - 7$.
$y'(x) = (x^2 + 2x - 7)' = 2x + 2$. Из равенства $y'(x) = 3$, можно найти абсциссу точки касания. $2x + 2 = 3$; $2x = 1$; $x = 1 : 2$; $x = 0{,}5$.

Ответ: $x = 0{,}5$.

11. Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Угловой коэффициент касательной $y = -4x + 15$ равен -4. Получим $y'(x) = -4$, где
$y'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x + 11)' = 3x^2 + 6x - 4$.
$3x^2 + 6x - 4 = -4$; $3x^2 + 6x = 0$; $3x(x+2) = 0$, следовательно, $x = 0$ либо $x = -2$.

Мы получили два возможных значения для абсциссы точки касания. Выбрать одно из них можно, подставив найденные значения x в формулы функции и касательной. Прямая будет касательной, если значения функции и касательной совпадут.

При $x = 0$; $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 11 = 11$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot 0 + 15 = 15$.
$y(0) = 11$, $y_{\text{кас}}(0) = 15$.

Так как значения функции и касательной при $x = 0$ разные, абсцисса $x = 0$ нам не подходит.

Проверим для $x = -2$.
$x = -2$; $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 11 = -8 + 12 + 8 + 11 = 23$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot (-2) + 15 = 8 + 15 = 23$.
Значения функции и касательной при $x = -2$ равны, значит абсцисса точки касания $x = -2$.

Ответ: -2.

12. На рисунке 4 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $(-9; 8)$. Определите количество целых точек на этом отрезке, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

Решение.

Целые точки — это точки с целочисленными значениями абсцисс (x). Производная функции $f(x)$ положительна, если функция возрастает.

На рисунке 5 отмечены точки, принадлежащие промежуткам возрастания, в которых производная функции $f(x)$ положительна, это точки: -8; -7; -5; -4; -3; 0; 2; 3; 4; 6. Ко-

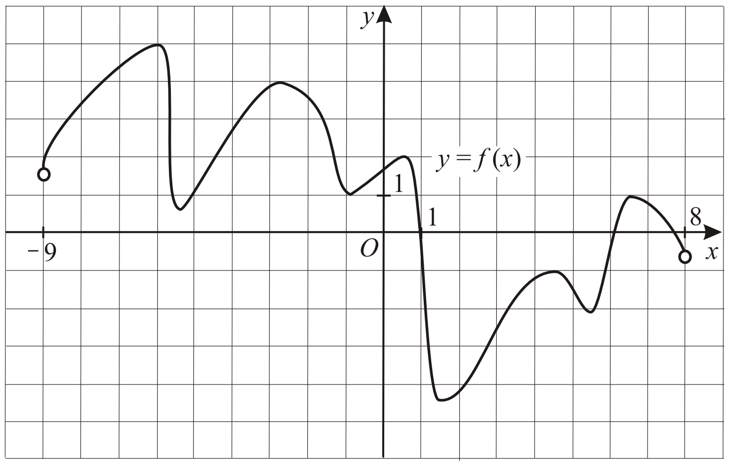


Рис. 4.

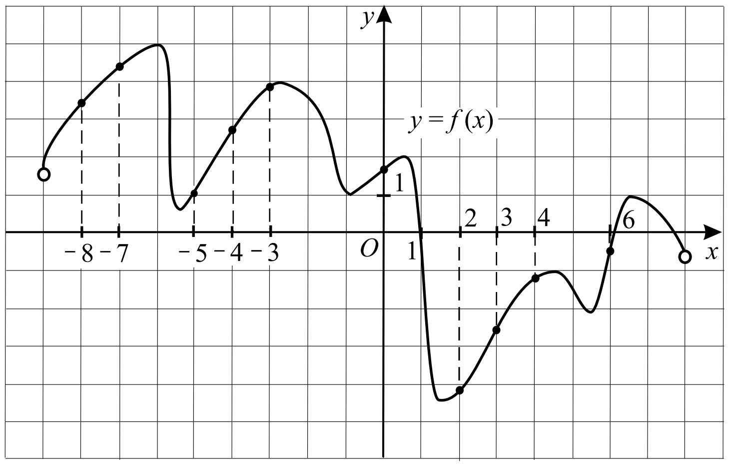


Рис. 5.

личество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна, равно 10.

Ответ: 10.

13. На рисунке 4 изображён график функции $f(x)$, определённой на отрезке $(-9; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение.

Определяем точку на графике, у которой абсцисса x лежит на отрезке $[-8, -4]$, а ордината y наибольшая из возможных, то есть эта точка «самая высокая». Для данного графика это точка $(-6; 5)$. Значит, $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = -6$.

Ответ: -6.

14. На рисунке 4 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $(-9; 8)$. Найдите количество точек на отрезке $[-8; 3]$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.

Решение.

Нарисуем прямую $y = 3$ (см. рис. 6). После этого будем сдвигать прямую вдоль оси Oy так, чтобы она оставалась параллельна прямой $y = 3$ (то есть оси Ox). Количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$, равно количеству таких касательных. По рисунку видно, что число это равно 6.

Ответ: 6.

15. На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.

Решение.

На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$. Говоря образно, точки экстремума — это те значения x, при которых

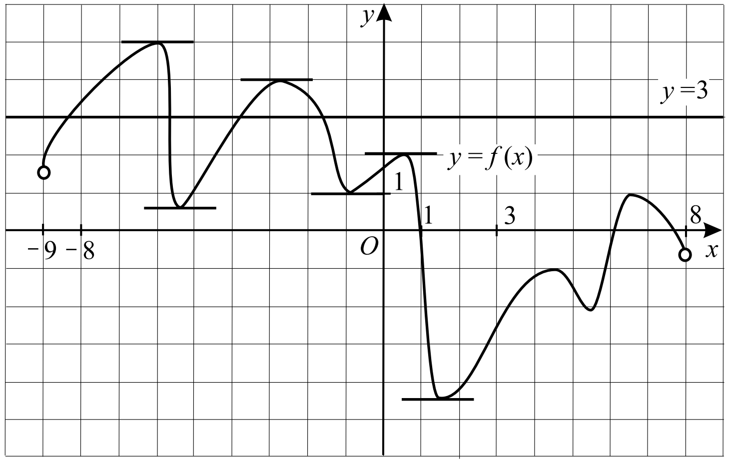


Рис. 6.

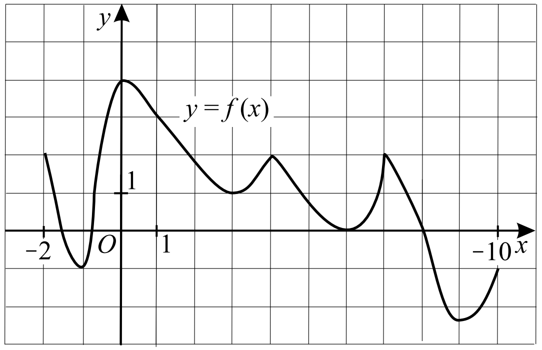


Рис. 7.

на графике видны «горбики» и «впадинки». Видим, что точками экстремума данной функции являются точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 7$ и $x = 9$. Сумма точек экстремума функции $y = f(x)$ равна $-1+0+3+4+6+7+9 = 28$.

Ответ: 28.

Теперь разберём несколько задач, в которых дан график производной функции.

16. На рисунке 8 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

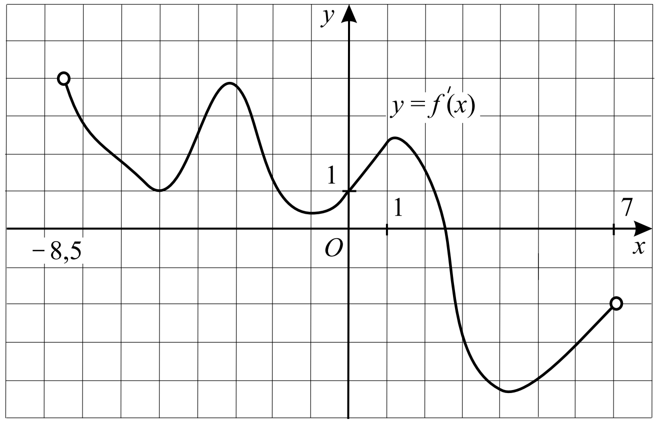


Рис. 8.

Решение.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 9).

Видим, что прямая и график функции имеют 4 общих точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих 4 точках, и в них ка-

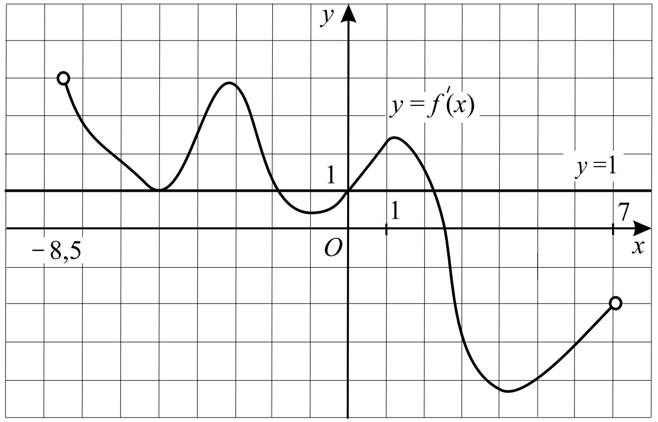


Рис. 9.

сательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

Ответ: 4.

17. На рисунке 8 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8{,}5; 7)$. Найдите промежутки возрастания функции. В ответе запишите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Функция возрастает на промежутках, в которых её производная положительна. Найдём те целые точки на графике, в которых производная положительна (лежит выше оси абсцисс Ox). Видим, что это точки лежат в интервале от $-8{,}5$ до 2,5. Целых среди них 10.

Ответ: 10.

18. На рисунке 8 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на отрезке $(-8{,}5; 7)$. В какой точке

отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение.

На отрезке $[-5; -2]$ производная функции $y = f'(x)$ положительна, следовательно, $y = f(x)$ возрастает на этом отрезке и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка (или, другими словами, при наименьшем значении x). В данном случае это $x = -5$.

Ответ: -5.

19. На рисунке 10 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на отрезке $(-5; 3]$.

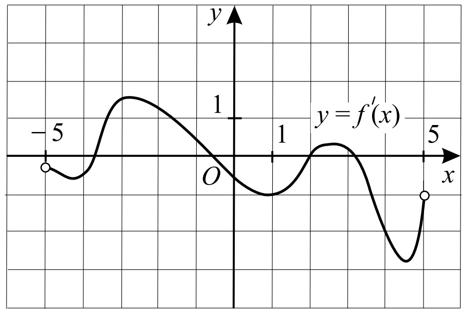


Рис. 10.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Производная функции $y = f'(x)$ на на интервале $(-5; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

Ответ: 3.

20. На рисунке 11 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

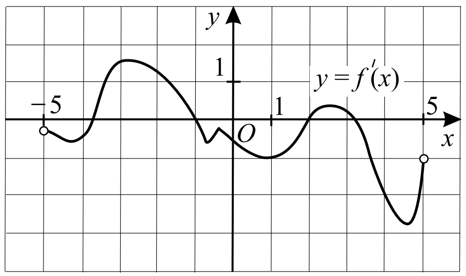


Рис. 11.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс . Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 12).

Ответ: -1.

21. На рисунке 11 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите про-

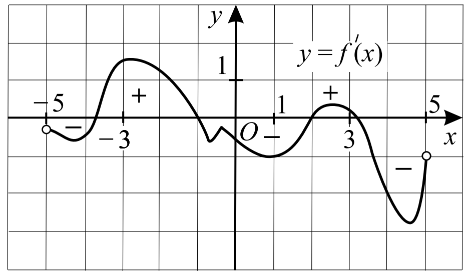


Рис. 12.

межутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 12) и выберем промежутки, где производная положительна, и, следовательно, функция возрастает.

Видим, что целые точки, входящие в промежутки возрастания, это -3, -2 и 3. Их сумма равна -2.

Ответ: -2.

22. На рисунке 13 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 14) и выберем промежутки, где производная отрицательна, и, следовательно, функция убывает. Это и будут промежутки убывания: $[-1; 2]$, $[6; 13]$, $[15; 16]$. Длина наибольшего из них равна $13 - 6 = 7$.

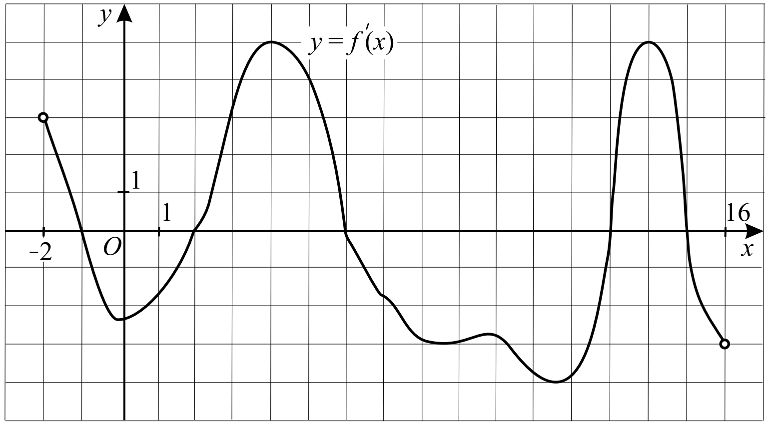


Рис. 13.

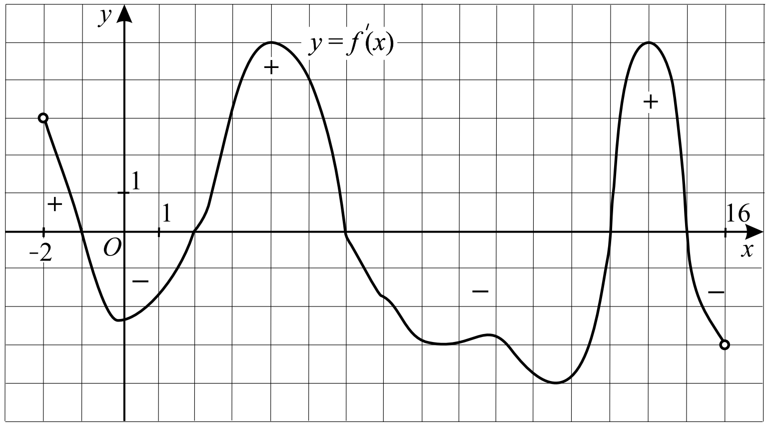


Рис. 14.

Ответ: 7.

❓ *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 15 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.

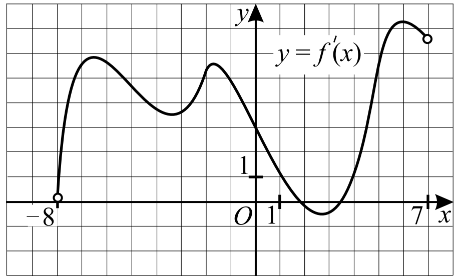


Рис. 15.

3. На рисунке 16 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

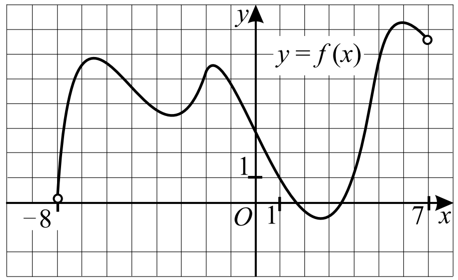


Рис. 16.

4. На рисунке 17 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 14$ или совпадает с ней.

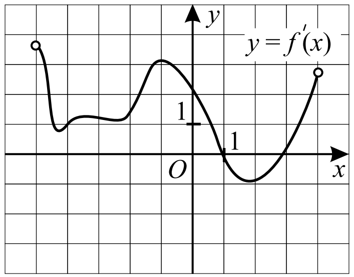


Рис. 17.

5. На рисунке 18 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 4]$.

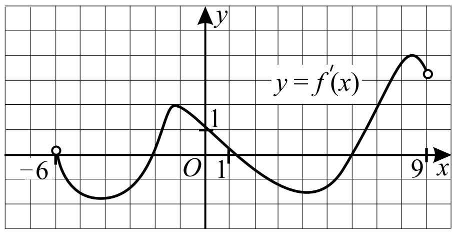


Рис. 18.

6. На рисунке 19 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

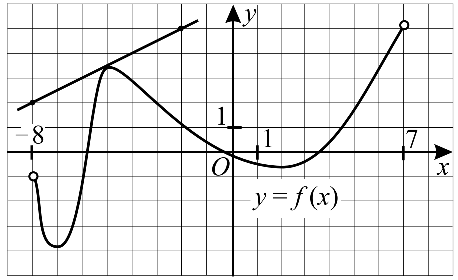


Рис. 19.

Вариант 2

1. Прямая $y = 2x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 20 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 13$.

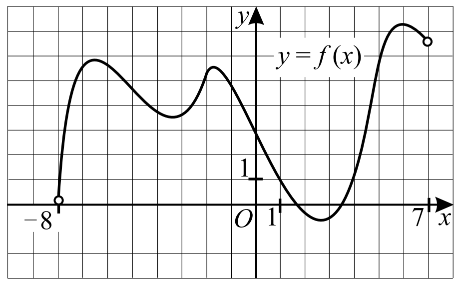


Рис. 20.

3. На рисунке 21 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4x - 7$ или совпадает с ней.

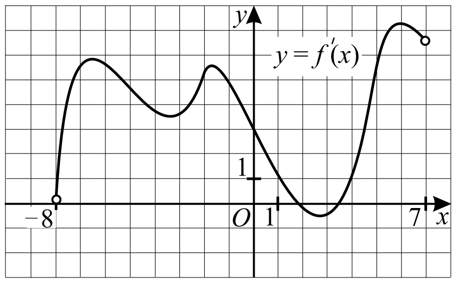


Рис. 21.

4. На рисунке 22 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 7]$ $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

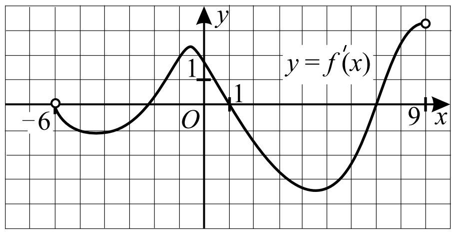


Рис. 22.

5. На рисунке 23 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

6. На рисунке 24 изображен график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

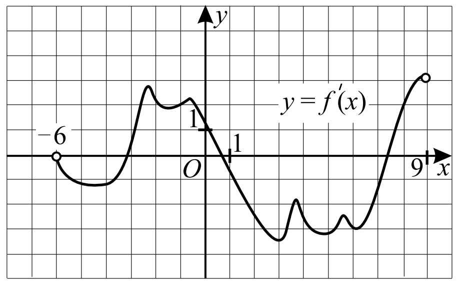


Рис. 23.

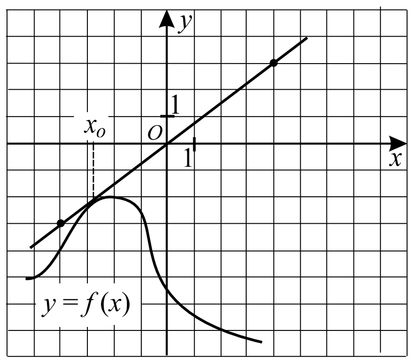


Рис. 24.

Вариант 3

1. Прямая $y = 47x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 25 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

3. На рисунке 26 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. В какой точке отрезка $[-4; 1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение.

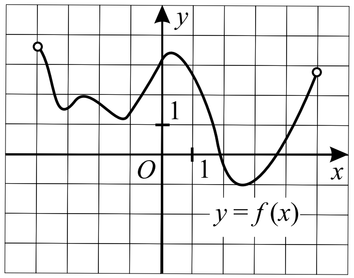


Рис. 25.

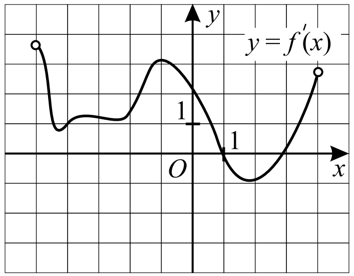


Рис. 26.

4. На рисунке 27 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$.

5. На рисунке 28 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

6. На рисунке 29 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

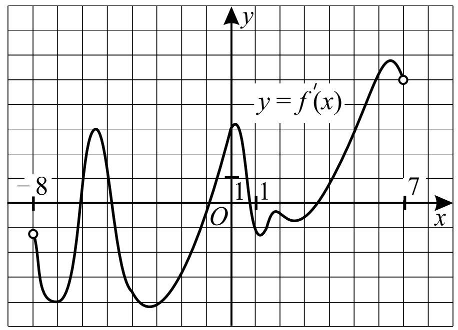


Рис. 27.

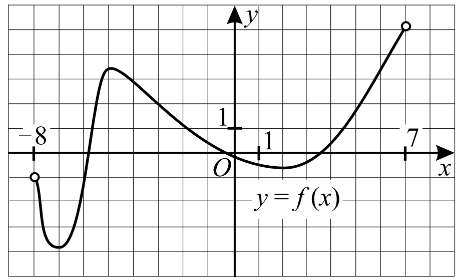


Рис. 28.

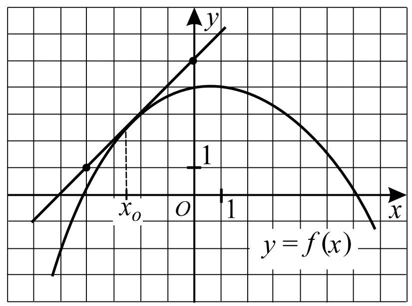


Рис. 29.

Вариант 4

1. Прямая $y = 3x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 30 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

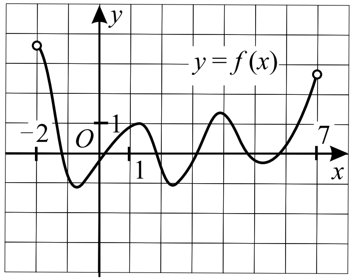


Рис. 30.

3. На рисунке 31 изображён график производной функции, $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-6; 1]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.

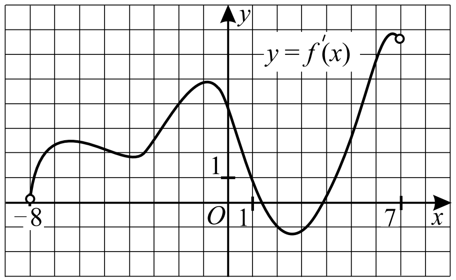


Рис. 31.

4. На рисунке 32 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

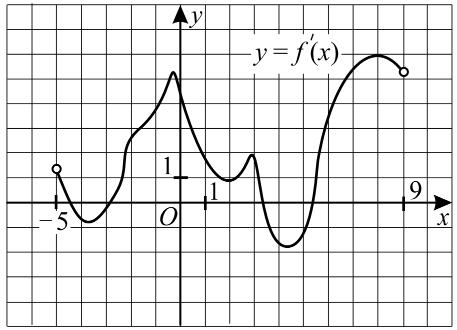


Рис. 32.

5. На рисунке 33 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.(3)

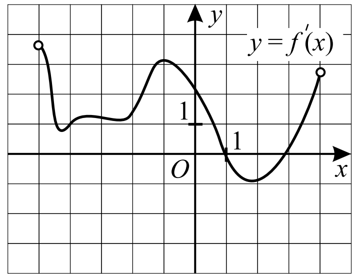


Рис. 33.

6. На рисунке 34 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Вариант 5

1. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

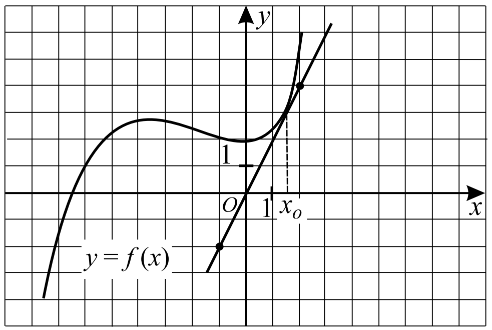


Рис. 34.

2. На рисунке 35 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

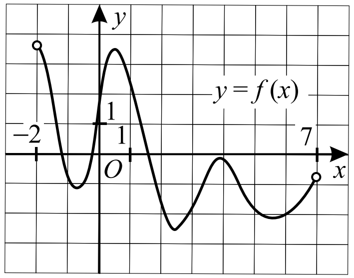


Рис. 35.

3. На рисунке 36 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.

4. На рисунке 37 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале (-8;7). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

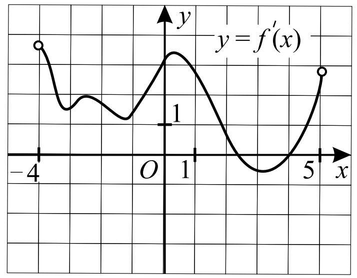


Рис. 36.

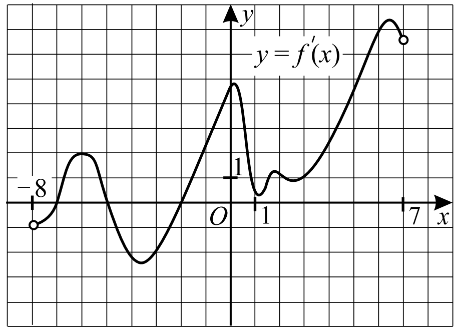


Рис. 37.

5. На рисунке 38 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

6. На рисунке 39 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

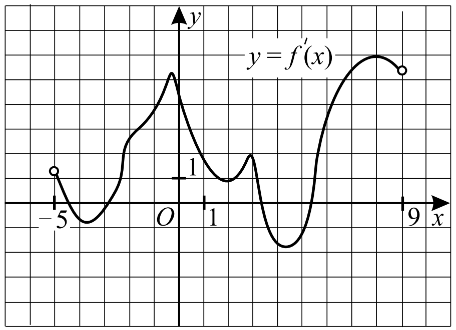


Рис. 38.

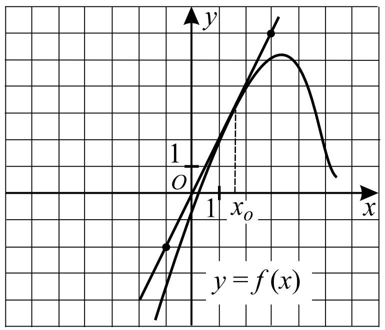


Рис. 39.

Вариант 6

1. Прямая $y = -5x + 19$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 40 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

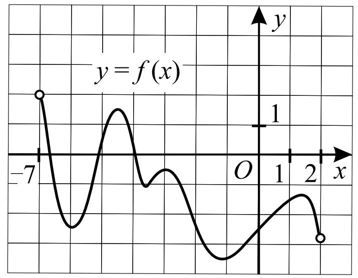


Рис. 40.

3. На рисунке 41 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$.. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

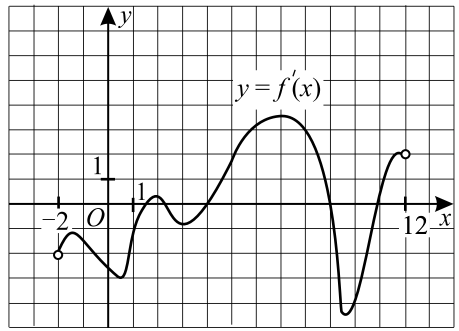


Рис. 41.

4. На рисунке 42 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 15$ или совпадает с ней.

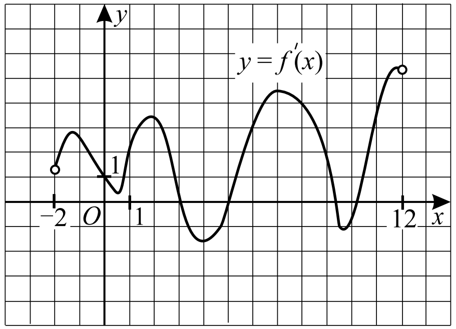


Рис. 42.

5. На рисунке 43 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4; 5)$.

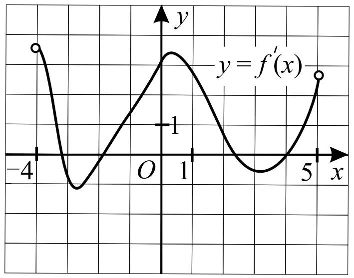


Рис. 43.

6. На рисунке 44 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

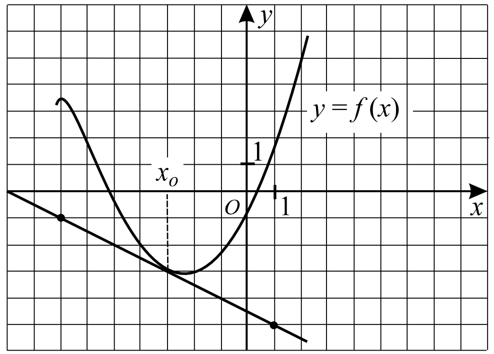


Рис. 44.

B10. Прикладные задачи

ⓘ *Немного полезной информации*

В заданиях данного типа рассматриваются реальные процессы, в которых необходимо найти нужный результат по заданной функции и начальным условиям или конкретным значениям входящих в формулу параметров. Все формулы в открытом банке заданий взяты либо из школьного курса физики, либо из экономических дисциплин. В зависимости от условия составляется или уравнение, или неравенство относительно значений функции. В большинстве случаев получаются квадратные уравнения или неравенства. Реже — линейные. В неравенствах третьей и четвёртой степени, как правило, удаётся достаточно просто извлечь соответствующий корень. Решения упрощаются за счёт того, что в реальных процессах фигурируют в основном положительные величины. В идеале, конечно, надо стремиться понять физический смысл задачи, дать развёрнутый ответ, соответствующий тематике задания. Практически — достаточно получить конкретное число для внесения в бланк ответов. Для этого используются ключевые фразы из формулировки.

1. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350$ К?

Решение.

1-й способ.

Составим и решим неравенство:

$$\eta \geqslant 75\%,$$
$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geqslant 75\%,$$
$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geqslant 0{,}75,$$
$$T_1 - 350 \geqslant 0{,}75T_1,$$
$$T_1 - 0{,}75T_1 \geqslant 350,$$
$$0{,}25T_1 \geqslant 350,$$
$$T_1 \geqslant 1400.$$

Итак, чтобы КПД данного теплового двигателя был не менее 75%, температура нагревателя должна быть не менее 1400 К.

Ответ: 1400.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение при КПД, равном 75%. Если найденное значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75 = \frac{T_1 - 350}{T_1} \cdot 100.$$

Умножим обе части уравнения на T_1.

$75T_1 = (T_1 - 350) \cdot 100,$
$75T_1 = 100T_1 - 35\,000,$
$35\,000 = 100T_1 - 75T_1,$
$25T_1 = 35\,000,$
$T_1 = 35\,000 : 25,$
$T_1 = 1400.$

2. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой: $q(p) = 280 - 10p$. p — цена (тыс. руб.); q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

Решение.

Составим функцию выручки предприятия, затем неравенство, соответствующее условию задачи.

$r = q \cdot p = (280 - 10p)p,$

По условию $r \geqslant 960$, поэтому

$(280 - 10p)p \geqslant 960,$

Решим квадратное неравенство:

$280p - 10p^2 \geqslant 960,$
$-10p^2 + 280p - 960 \geqslant 0,$

$10p^2 - 280p + 960 \leqslant 0,$
$p^2 - 28p + 96 \leqslant 0,$

$p_1 = 4$, $p_2 = 24$. $\Rightarrow$ $p \in [4; 24]$, $p_{max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

Ответ: 24.

3. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле: $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 700 000 руб. в месяц.

Решение.

Найдём месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет равна 700 000 руб. в месяц. Если такое значение единственно, неравенство составлять и решать не нужно.

1-й способ.

Выразим искомую величину сначала в общем виде, затем вычислим конкретное значение.

$\pi = q(p - v) - f,$
$\pi + f = q(p - v),$

$$q = \frac{\pi + f}{p - v} = \frac{700\,000 + 800\,000}{400 - 300} = \frac{1\,500\,000}{100} = 15\,000.$$

Итак, при наименьшем месячном объёме в 15 000 штук изделий, прибыль предприятия будет составлять не менее 700 000 руб.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение.

$$\pi = 700\,000, \quad f = 800\,000, \quad v = 300, \quad p = 400,$$
$$\pi = q(p - v) - f,$$
$$700\,000 = q(400 - 300) - 800\,000,$$
$$100q - 800\,000 = 700\,000,$$
$$100q = 1\,500\,000,$$
$$q = 1\,500\,000 : 100,$$
$$q = 15\,000.$$

Ответ: 15 000.

4. Высота столба жидкости в баке с открытым краном меняется по закону $H(t) = 1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2$, где t — время в минутах, H — высота в метрах. Через сколько минут после открытия крана вода полностью вытечет из бака?

Решение.

Если вода вытекает полностью, то очевидно, что высота жидкости в баке равна нулю. Получаем $H = 0$, составляем и решаем квадратное уравнение:

$$H(t) = 0,$$
$$1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2 = 0,$$
$$D = (0{,}8)^2 - 4 \cdot 0{,}125 \cdot 1{,}28 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-0{,}8)}{2 \cdot 0{,}125} = 3{,}2.$$

Итак, вода полностью вытекает из бака через 3,2 секунды после открытия крана.

Ответ: 3,2.

5. Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100$ К, $a = 37{,}5$ К/мин, $b = -0{,}25$ К/мин². Прибор может испортиться при температуре свыше 1000 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

Решение. Зависимость температуры нагревательного элемента от времени имеет вид квадратичной функции. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент при t_2 отрицателен ($b = -0{,}25 < 0$). График процесса изменения температуры имеет следующий вид.

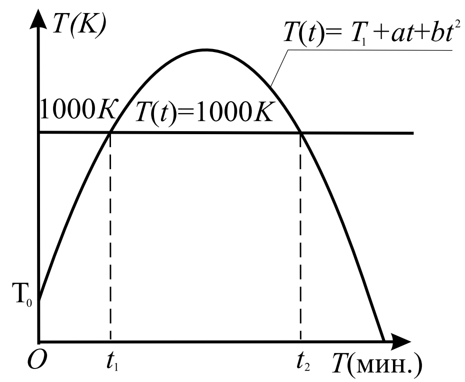


Рис. 45.

Таким образом, температура 1000 К достигается дважды: первый раз на промежутке возрастания, второй – на промежутке убывания. Но реально до второго раза температура просто не дойдёт, так как прибор уже в момент времени t_1 выходит из строя. Следовательно, наша цель — определить меньший корень квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}
&100 + 37{,}5t - 0{,}25t^2 = 1000,\\
&0{,}25t^2 - 37{,}5t + 900 = 0, \qquad \Big|\times 4\\
&t^2 - 150t + 3600 = 0,\\
&t_1 = 30, \quad t_2 = 120.
\end{aligned}$$

Следовательно, чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить не позже, чем через 30 минут после начала работы.

Ответ: 30.

6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление даётся формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом.

Решение.

В этой задаче главное — понять, что здесь обозначают переменные, входящие в формулу. Общее сопротивление должно быть не меньше 21 Ом, в формуле общее сопротивление обо-

значается R, $R \geqslant 21$. Приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом и обозначается R_1, и электрообогреватель с сопротивлением R_2, подключены параллельно. Составим и решим неравенство:

$$\begin{aligned}
&\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R,\\
&\frac{70R_2}{70 + R_2} \geqslant 21,\\
&70R_2 \geqslant (70 + R_2) \cdot 21,\\
&70R_2 \geqslant 1470 + 21R_2,\\
&70R_2 - 21R_2 \geqslant 1470,\\
&R_2 \geqslant 30.
\end{aligned}$$

Значит, для нормального функционирования данной электросети, наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя должно быть не менее 30 Ом.

Ответ: Ответ: 30.

7. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \dfrac{1}{7} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P составляет $19{,}551 \cdot 10^{22}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Решение.

Выразим T^4 из формулы $P = \sigma S T^4$.

$T^4 = \dfrac{P}{\sigma S}$. Подставим заданные значения переменных.

$$T^4 = \frac{19{,}551 \cdot 10^{22}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{16}} = \frac{19{,}551}{5{,}7} \cdot 7 \cdot 10^{22+8-16} =$$
$$= 3{,}43 \cdot 7 \cdot 10^{14} = 343 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^3 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^4 \cdot 10^{12},$$
$$T = \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}} = 7 \cdot 10^3 = 7000.$$

Следовательно, температура данной звезды составляет 7000 К.

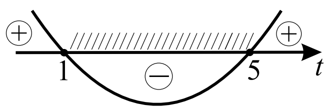
Ответ: 7000.

8. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?

Решение.

Составим и решим неравенство:

$$h(t) \geqslant 25,$$
$$-5t^2 + 30t \geqslant 25,$$
$$t^2 - 6t \leqslant -5,$$
$$t^2 - 6t + 5 \leqslant 0,$$
$$t_1 = 1, t_2 = 5.$$
$$t \in [1; 5],$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4.$$



Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунд.

Ответ: 4.

9. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ {}^\circ C^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Решение.

1-й способ.

Обозначим длину зазора через m и свяжем её с температурой. Затем определим значение температуры при которой зазор станет равным нулю. Расстояние от начала одного рельса до начала следующего L складывается из длины рельса и зазора между рельсами. В исходном состоянии $L = l_0 + m_0$, после нагрева $L = l(t^\circ) + m$. При $m = 0$ получим:

$$l(t^\circ) = l_0 + m_0,$$
$$l_0 + m_0 = l_0(1 + \alpha t^\circ), \qquad \Big|: l_0,$$
$$1 + \frac{m_0}{l_0} = 1 + \alpha t^\circ,$$
$$\alpha t^\circ = \frac{m_0}{l_0},$$
$$t^\circ = \frac{m_0}{\alpha l_0},$$
$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{5}{20} \cdot 10^2 = 25^\circ.$$

Следовательно, при 25°C каждый рельс удлинится на 6 мм, и зазор между ними исчезнет.

Ответ: 25.

2-й способ.

Длина зазора станет равной нулю если рельс станет длиннее на величину исходного зазора:

$$l(t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$l_0(1 + \alpha t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20(1 + 1{,}4 \cdot 10^{-5} t^\circ) - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 + 20 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-5} t^\circ - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-5} t^\circ = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 25.$$

Ответ: 25.

10. Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид: $h = 4{,}9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров выше первого второе сооружение, если с него камень падал на 1 с дольше?

Решение.

Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$$h_1 = 4{,}9t_1^2, \quad h_2 = 4{,}9t_2^2,$$
$$\Delta h = h_2 - h_1 = 4{,}9(t_1^2 - t_2^2) = 4{,}9(5{,}5^2 - 4{,}5^2) =$$
$$= 4{,}9(5{,}5 - 4{,}5)(5{,}5 + 4{,}5) = 49.$$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

В этой задаче можно было сначала вычислить высоту каждого из зданий, а потом найти их разность. Вычисления были бы немного более громоздкие, но ответ, конечно же, получается одинаковый.

Ответ: 49.

11. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки, g — ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 90 см? (g считать равным 10 м/с².)

Решение.

Приведём данные к требуемым единицам измерения: 90 см = 0,9 м.

Составим неравенство по условию задачи и решим его относительно скорости.

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) > 0,$$
$$\frac{v^2}{L} - g > 0,$$

$v^2 > gL, \quad v > 0,$

$v > \sqrt{gL} = \sqrt{10 \cdot 0,9} = \sqrt{9} = 3.$

Итак, скорость вращения ведёрка должна быть более 3 м/с.

Ответ: 3.

12. Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиуса R. Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда, по технологии, не должна превосходить 1 130 400 Н. Принять: $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг, $\pi = 3{,}14$.

Решение.

$F_A \leqslant 1\,130\,400,$

$\dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \leqslant 1\,130\,400,$

$R^3 \leqslant \dfrac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4} = 27,$

$R^3 \leqslant \dfrac{3 \cdot 1\,130\,400}{3{,}14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$

$R \leqslant 3.$

Следовательно, радиус батискафа не может превзойти 3 м. Ответ: 3.

13. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2{,}5$ — начальный уровень

воды, $a = \dfrac{1}{1000}$ и $b = -\dfrac{1}{10}$ — постоянные, t — время в минутах с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах.)

Решение.

Отсутствие воды в баке означает, что $H(t) = 0$. Подставим данные параметры в левую часть формулы, составим и решим уравнение.

$H(t) = 0,$

$at^2 + bt + H_0 = 0,$

$\dfrac{t^2}{1000} - \dfrac{t}{10} + 2{,}5 = 0,$

$t^2 - 100t + 2500 = 0,$

$(t - 50)^2 = 0,$

$t = 50.$

То есть вода из бака будет вытекать 50 минут.

Ответ: 50.

14. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определённым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{200\text{ м}}$, $b = \dfrac{9}{20}$ — постоянный параметр, x — расстояние от машины до камня, считаемое по горизонтали, y — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены, высота которой 7 м, нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над ней на высоте не менее 2 метров?

Решение.

По условию $y \geqslant 7 + 2 = 9$. Подставив в левую часть формулы $ax^2 + bx \geqslant 9$ заданные параметры, составим и решим неравенство.

$$-\frac{x^2}{200} + \frac{9x}{20} \geqslant 9, \qquad \Big| \times(-200)$$
$$x^2 - 90x + 1800 \leqslant 0,$$
$$(x-30)(x-60) \leqslant 0,$$
$$x \in [30; 60],$$
$$x_{\max} = 60.$$

То есть наибольшее расстояние от крепостной стены равно 60 м.

Ответ: 60.

15. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах от момента выезда из города. Определите наибольшее время (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее, чем 42 км от города.

Решение.

Составим и решим неравенство.

$$57t + \frac{18t^2}{2} \leqslant 42,$$
$$9t^2 + 57t - 42 \leqslant 0, \qquad \Big| : 3$$

$$3t^2 + 19t - 14 \leqslant 0,$$
$$3\Big(t+7\Big)\Big(t - \frac{2}{3}\Big) \leqslant 0,$$
$$t \in \Big[-7; \frac{2}{3}\Big],$$
$$t_{\max} = \frac{2}{3}\text{ ч} = \frac{2}{3} \cdot 60\text{ мин} = 40\text{ мин}.$$

Итак, мотоциклист будет находиться в зоне сотовой связи 40 минут.

Ответ: 40.

16. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 33$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 84 метров.

Решение.

Подставим в левую часть формулы значения данных параметров, составим и решим неравенство.

$$33t - \frac{6t^2}{2} \geqslant 84,$$
$$-3t^2 + 33t - 84 \geqslant 0, \qquad \Big| : (-3)$$
$$t^2 - 11t + 28 \leqslant 0,$$
$$(t-4)(t-7) \leqslant 0,$$
$$t \in [4; 7],$$
$$t_{\min} = 4.$$

То есть от момента торможения прошло не менее 4 с.

Ответ: 4.

17. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 3$ кг и радиусом $R = 14$ см, и двух боковых массами по $M = 2$ кг, радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки (в кг $\cdot$ см^2) относительно оси вращения определяется выражением $I = \dfrac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для неё 942 кг/см^2?

Решение.

Подставим данные значения параметров в левую часть формулы, составим и решим неравенство.

$$\frac{(3+2\cdot 2)\cdot 14^2}{2} + 2(28h + h^2) \leqslant 942,$$
$$686 + 2(28h + h^2) \leqslant 942,$$
$$h^2 + 28h - 128 \leqslant 0,$$
$$(h+32)(h-4) \leqslant 0,$$
$$h \in [-32; 4],$$
$$h_{\max} = 4.$$

То есть, чтобы момент инерции катушки не превышал 942 кг/см^2, нужно, чтобы $h \leqslant 4$ см.

Ответ: 4.

18. В боковой стенке высокого цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная

в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \dfrac{g}{2}k^2t^2$, где t — прошедшее время (в секундах), $H_0 = 45$ м — начальная высота столба воды, $k = \dfrac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется не более чем $\dfrac{4}{9}$ первоначального объёма? Ответ выразите в секундах.

Решение.

Составим и решим уравнение. Объём воды в баке можно выразить как $V = H \cdot S$, где H — высота воды в баке, а S — площадь его поперечного сечения. S — величина постоянная, следовательно, бак будет заполнен водой на $\dfrac{4}{9}$ объёма, когда высота воды в нём составит $\dfrac{4}{9}$ первоначальной $H(t) = \dfrac{4}{9}H_0$.

$$H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{4}{9}H_0,$$
Пусть $kt = x$,
$$\frac{g}{2}x^2 - \sqrt{2gH_0}x + \frac{5}{9}H_0 = 0,$$
$$5x^2 - 30x + 25 = 0, \qquad \Big|: 5$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5,$$
$$k = \frac{1}{200},$$

$$\frac{t}{200} = x,$$
$$t_1 = 200, \quad t_2 = 1000.$$

Итак, объём бака станет равным $\frac{4}{9}$ первоначального объёма через 200 с. Второй корень не подходит по смыслу задания, так как здесь рассматривается только промежуток времени до полного опустошения бака.

Ответ: 200.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 550-30n$. Определите наименьший уровень цены n (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $h = q \cdot n$ составит не менее 2480 тыс. руб.

Ответ: 8.

2. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После того, как кран открыли, вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 8,95 - 3,36t + 0,314t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

Ответ: 5.

3. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0+xt+yt^2$, где $T_0 = 140$ К, $x = 60$ К/мин, $y = -0{,}25$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1240 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

Ответ: 20.

4. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 60%, если температура холодильника $T_2 = 180°$?

Ответ: 450.

Вариант 2

1. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить холодильник. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого холодильника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление даётся формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом.

Ответ: 80.

2. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \dfrac{1}{324} \cdot 10^{17}$м^2, а излучаемая ею мощность P равна $184,68 \cdot 10^{18}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Ответ: 1800.

3. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -4t^2+25t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 25 метров.

Ответ: 3,75.

4. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При температуре 0°C между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(°C^{-1})$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Ответ: 50.

Вариант 3

1. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле: $h(q) = q(p - m) - k$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 8000$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $m = 2000$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $k = 10\,500\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб. в месяц.

Ответ: 2000.

2. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(wt + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 4$ В, частота $w = 100°/$с, фаза $\varphi = 20°$. Датчик настроен так, что если напряжение U в нём не ниже чем 2 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Ответ: 60.

3. После паводка уровень воды в колодце может повыситься. Можно определить его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$ м. До паводка время падения камушков составляло 1,2 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше, чем на 0,2 с? (Ответ выразите в м.)

Ответ: 2,2.

4. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60^\circ$/мин - начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 20^\circ$/мин^2 - угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 3150°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 15.

Вариант 4

1. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 280$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$(Гц), где с — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 30$ м/с и $v = 20$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости с (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 330 Гц?

Ответ: 300.

2. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 200$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 280$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 1 537 200 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

Ответ: 8,8.

3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние от линзы до лампочки d_1 может изменяться в пределах от 85 см до 105 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} = \dfrac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 90.

4. К источнику с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \dfrac{E \cdot R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 10 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: 5.

Вариант 5

1. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 300$ м - длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 180 м? Ответ выразите в км/с.

Ответ: 240 000.

2. Автомобиль, масса которого равна $m = 1200$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \dfrac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

Ответ: 20.

3. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону

$v(t) = 4\sin\dfrac{2\pi t}{3}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Ответ: 0,25.

4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,2} = const$, где p (атм.) - давление в газе, V - объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 51,2 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 64 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 1,6.

Вариант 6

1. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 14$ м/с - начальная скорость мячика, а g - ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной $9,8$ м?

Ответ: 15.

2. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t - время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ - начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10^\circ/\text{мин}^2$ - угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 1980°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 18.

3. Два тела массой 5 кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$. Под каким наименьшим углом α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 60 джоулей?

Ответ: 120.

4. Груз массой 0,7 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 1{,}2 \cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле

$e = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,252 Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Ответ: 0,5.

B11. Наибольшие и наименьшие значения функций

ⓘ *Немного полезной информации*

Вспомним основные правила, которые позволяют исследовать свойства функции с помощью производной.

Для всех этих правил есть общее условие — они выполняются для непрерывных функций. Полезно помнить, что если у функции можно посчитать производную, то функция непрерывна.

Если производная положительна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция возрастает на этом отрезке.

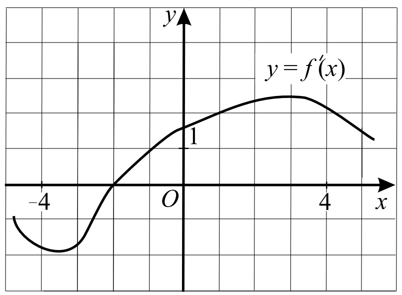


Рис. 46.

Если производная отрицательна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция убывает на этом отрезке.

Например, по графику $f'(x)$, изображённому на рисунке 46, можно установить:

- $f(x)$ убывает на отрезке $[-4;-2]$ (здесь $f'(x) \leqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x=-2$);
- $f(x)$ возрастает на отрезке $[-2;5]$ (здесь $f'(x) \geqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x=-2$).

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис. 47), причём в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ — точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

Рис. 47.

Приведём пример нахождения точек максимума и минимума по графику производной. На рисунке 48 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ — точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ — точка минимума функции $f(x)$.

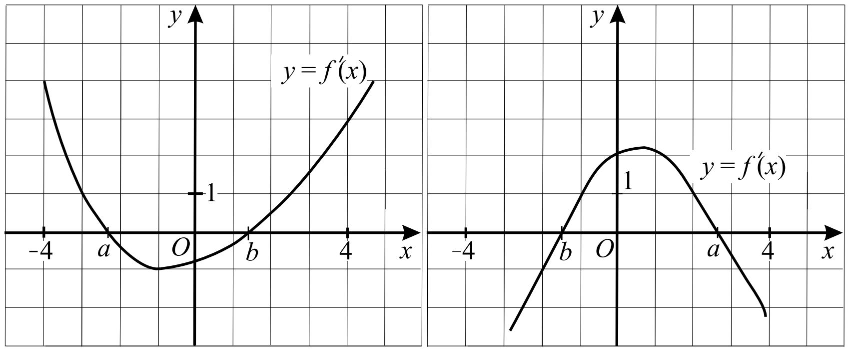


Рис. 48.

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значение либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю. Поэтому один из способов отыскать наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке — посчитать её значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю, и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке — исследовать функцию на монотонность (другими словами, на возрастание-убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки минимума и про точки, где функция принимает наименьшее значение.

Давайте разберём на примерах, что это значит.

Задачи с решениями

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

Решение.

1-й способ.

1. Найдём значения функции на концах отрезка.
   $y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\dfrac{20}{27}$, так как $e \approx 2{,}7$;
   $y(-7) = (-7+7)e^{x+8} = 0$.

2. Найдём производную:
   $y' = \big((x+7)e^{x+8}\big)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' =$
   $= 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}$.

3. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
   $(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8 = 0; \quad x = -8$.

4. Это значение x принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

5. Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:
   $y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1$.

6. Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Видим, что из чисел $-\dfrac{20}{27}; -1; 0$ наименьшим является -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

1. Найдём производную: $y' = \big((x+7)e^{x+8}\big)' = (x+8)e^{x+8}$.

2. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
$(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8 = 0; \quad x = -8.$

3. Проверим, принадлежат ли эти значении x промежутку, данному в задаче: -7 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

4. Нарисуем числовую ось и нанесём на неё нули ($x = -8$) и знаки производной, которые определяются с помощью пробной точки.
$y'(-9) = (-9+8)e^{-9+8} = -1e^{-1} < 0;$
$y'(-7) = (-7+8)e^{-7+8} = 1e > 0.$

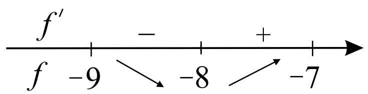


Рис. 49.

5. Чертим эскиз графика функции: По рисунку видно,

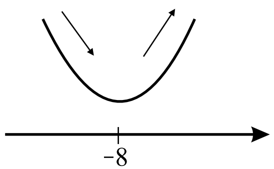


Рис. 50.

что наименьшее значение функция принимает в точке $x = -8$.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -8$:
$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$

Ответ: -1.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = 3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:
$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 =$
$= 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}.$

2. Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$. Это выражение неотрицательно при всех значениях x, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geqslant 3\sqrt{2}\cdot(-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geqslant 0$ и функция возрастает при всех значениях $\boldsymbol{x}$. Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x = 0$).

3. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$.
$y = 3\sqrt{2}\sin 0 + 3\sqrt{2}\cdot 0 - 15 = -15.$

Ответ: -15.

3. Найдите наибольшее значение функции

$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:
   $y(0) = 4\sqrt{2}\cos 0 + 4\cdot 0 - \pi - 1 = 4\sqrt{2} - \pi - 1 \approx 6 - 3{,}1 - 1;$
   $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2} + 4\cdot\dfrac{\pi}{2} - \pi - 1 = 0 + \pi - 1 \approx 3{,}1 - 1.$

2. Найдём производную:
   $y'(x) = (4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1)' = -4\sqrt{2}\sin x + 4.$

3. Найдём значения на заданном промежутке, при которых производная равна нулю: $-4\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$; $-4\sqrt{2}\sin x = -4$; $\sqrt{2}\sin x = 1$; $\sin x = 1/\sqrt{2}$.
   Так как x принадлежит отрезку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, нам подходит $x = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Найдём значение функции при $x = \dfrac{\pi}{4}$.
   $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + 4\cdot\dfrac{\pi}{4} - \pi - 1 = 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi - \pi - 1 =$
   $= 4 - 1 = 3.$

5. Выберем из пунктов 1 и 4 наибольшее значение функции. Видим, что наибольшим является 3.

Ответ: 3.

4. Найдите наибольшее значение функции
$y = 16x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:
   $$y' = (16x - 16tgx + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$
   $$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. Определим знаки производной:
   $y'(x) = \dfrac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0.$
   Это выражение неположительно, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$. Следовательно, $y'(x) \leqslant 0$ и функция убывает при всех допустимых значениях $\boldsymbol{x}$. Наибольшее значение убывающая функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

   Вычисляем значение функции в точке $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

   $y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 16\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) - 16\,\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$
   $= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$

Ответ: -40.

5. Найдите наибольшее значение функции $y = 20x - \ln(x+4)^{20}$ на отрезке $[-3{,}5; 0]$.

Решение.

1. Найдём производную:
   $y' = (20x - \ln|x+4|^{20})' = 20 - (20\ln|x+4|)' =$

$$= \begin{cases} 20 - \dfrac{20}{x+4}, \ x > -4, \\ 20 + \dfrac{20}{x+4}, \ x < -4; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20x + 80 - 20}{x+4}, \ x > -4, \\ \dfrac{20x + 80 + 20}{x+4}, \ x < -4; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{20x + 60}{x+4}, \ x > -4, \\ \dfrac{20x + 100}{x+4}, \ x < -4. \end{cases}$$

Но нас интересует только промежуток $[-3{,}5; 0]$.

2. Определим нули и знаки производной на заданном промежутке $x > -4$.

   $y'(x) = 0; \quad 20x + 60 = 0; \quad x = -\dfrac{60}{20}; \quad x = -3.$

3. Отмечаем на числовой оси нули функции ($x = -3$) и точки, где производная (или функция) не существует (в данном случае по определению логарифма $x \neq -4$).

4. Методом «пробной точки» определяем знак производной на каждом промежутке. Для этого считаем значение производной в любой нами выбранной точке каждого промежутка (см. рис. 51).

   $y'(-3{,}5) = \dfrac{20 \cdot (-3{,}5) + 60}{-3{,}5 + 4} < 0;$

   $y'(5) = \dfrac{20 \cdot 5 + 60}{5 + 4} > 0.$

5. Отмечаем границы заданного в условии промежутка и смотрим, в какой точке должно быть наименьшее зна-

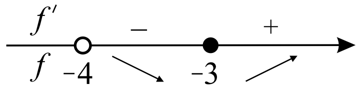


Рис. 51.

чение функции. В данной задаче наименьшее значение на промежутке $[-3{,}5; 0]$ функция примет в точке $x = -3$ (см. рис. 52).

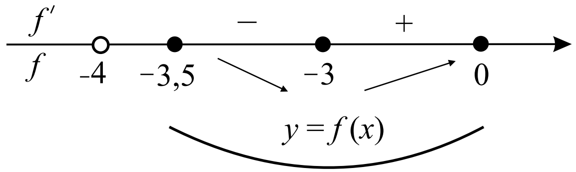


Рис. 52.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -3$.
   $y(-3) = 20 \cdot (-3) - \ln(-3 + 4)^{20} = -60 - \ln 1 = -60.$

Ответ: -60.

? ***Варианты для самостоятельного решения***

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 7x - 12$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 18tgx + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; 0\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(2x) - 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x+24)e^{x-8}$.

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 16\cos x + 27x - 6$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{28x}{\pi} + 7\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\ln(x+5) - 5x + 11$ на отрезке $[-4{,}8; 0]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (31 - x)e^{x+31}$.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 17\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \ln(x+12)^8$ на отрезке $[-11{,}5; 0]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 15x + 13\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (35 - x)e^{35-x}$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 15\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 15x - 15\ln(x+11) + 4$ на отрезке $[-10{,}5; 8]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 80x - 80\,\mathrm{tg}\,x + 20\pi$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (23 + x)e^{23-x}$.

Вариант 5

1. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{51x}{\pi} + 17\sin x + 15$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = -8x + 8\,\mathrm{tg}\,x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x^2 - 5x - 5\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - x - 5)e^{x+8}$.

B12. Построение и исследование математических моделей

ⓘ *Немного полезной информации*

Задачи этого раздела — текстовые задачи на движение, сравнительную скорость выполнения определённого задания или на совместную работу. Чтобы решать задачи на движение, достаточно знать формулу пути при равномерном движении (то есть движении с постоянной скоростью) и её следствия для вычисления времени или скорости.

$$s = vt; \quad v = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{v}.$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ — путь, $\boldsymbol{t}$ — время, $\boldsymbol{v}$ — скорость.

В задачах на движение по течению или против течения реки нужно к тому же понимать, что при движении по течению (иногда говорят «вниз по течению») скорость реки прибавляется, а против течения («вверх по течению») — отнимается от собственной скорости транспорта (лодки, катера, теплохода). Скорость плота (бревна) совпадает со скоростью течения реки. На озере вода считается стоячей (скорость течения нулевая).

Чтобы составить уравнение, данные из условия и их следствия лучше всего занести в таблицу.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
A	s_1	v_1	t_1
B	s_2	v_2	t_2

Конкретное содержание и последовательность заполнения клеток таблицы зависит от специфики задания. Рассмотрим типичные из них.

Задачи с решениями

1. Из одного города в другой выехали одновременно двое байкеров. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч, а вторую со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера. Определите скорость первого байкера, если в другой город они приехали одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть скорость первого байкера равна $\boldsymbol{x}$ км/ч. Обозначим через $\boldsymbol{s}$ половину пути между городами. Первый байкер проехал $2s$ км. Его время было $\dfrac{2s}{x}$ ч. Заполним таблицу для составления уравнения. Второй проехал первую половину пути (то есть s) со скоростью 80 км/ч за время $t = \dfrac{s}{80}$ (ч), а вторую со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера (то есть $(x + 24)$ км/ч) за время $\dfrac{S}{(x+24)}$ ч.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
1-й байкер	$2S$	x	$\frac{2S}{x}$
2-й байкер (1-я половина пути)	S	80	$\frac{S}{80}$
2-й байкер (2-я половина пути)	S	$x+24$	$\frac{S}{x+24}$

Так как, по условию, время движения первого байкера равно общему времени (то есть сумме времён) движения второго байкера, то имеет место следующее уравнение:

$$t_1 = t_2 + t_3,$$

$$\frac{2S}{x} = \frac{S}{80} + \frac{S}{x+24}.$$

Разделив обе части последнего равенства на s, получим дробно-рациональное уравнение, решаемое умножением левой и правой части на общий знаменатель. Решают его последующим сокращением и получением целого уравнения (то есть уравнения без деления на переменную). Затем, после нахождения корней этого уравнения, их проверяют на соответствие реальному смыслу задачи (и на неравенство нулю общего знаменателя). В части B это вполне можно сделать чисто визуально, устно, так как требуется лишь правильный ответ.

Решим наше уравнение.

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{80} + \frac{1}{x+24} \qquad \Big| \times 80x(x+24) \neq 0,$$

$$160\,(x+24) = x\,(x+24) + 80x,$$

$$x^2 - 56x - 3840 = 0,$$

$$x_1 = -40, \quad x_2 = 96.$$

Первый корень явно не подходит по смыслу задачи, потому что скорость должна быть положительна. Следовательно, скорость первого байкера 96 км/ч. (Для второго байкера тоже получилась не такая уж и большая скорость — 120 км/ч на второй половине пути).

Ответ: 96.

Примечание. Математическую модель задачи можно упростить, приняв длину половины пути за 1, тогда весь путь равен 2. Так можно делать, когда в задаче не задано численно ни одного участка пути.

2. Рыбонадзорный катер патрулирует участок реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость катера в стоячей воде (собственная скорость), если скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим скорость катера в стоячей воде через x км/ч. Тогда скорость по течению равна $x+1$ км/ч, а против течения $x-1$ км/ч. Заполним таблицу по условию задачи.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
По течению	180	$x+1$	$\frac{180}{x+1}$
Против течения	180	$x-1$	$\frac{180}{x-1}$

Составим и решим уравнение.

$$t_2 - t_1 = 1$$
$$\frac{180}{x-1} - \frac{180}{x+1} = 1, \qquad \Big| \times (x-1)(x+1) \neq 0,$$
$$180(x+1) - 180(x-1) = (x-1)(x+1),$$
$$180x + 180 - 180x + 180 = x^2 - 1,$$
$$x^2 = 361,$$
$$x_1 = -19, \quad x_2 = 19.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч.

Ответ: 19.

Среди задач данного раздела встречаются условия задержек в пути. Длительность таких пауз приходится дополнительно включать в уравнения. Не забывайте при этом переводить всё в одинаковые единицы.

3. Экипаж дальнобойщиков проехал из своего города на побережье расстояние 6800 км с некоторой постоянной скоростью и без остановок. На обратном пути он увеличил скорость на 5 км/ч, что позволило ему задержаться на 5 часов и, тем не менее, затратить времени столько же, сколько он ехал из города на побережье. Найдите скорость при движении без остановок. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим безостановочную скорость через ***x*** км/ч. Тогда скорость движения на обратном пути равна 5 км/ч. Табличная версия задачи имеет следующий вид.

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
Из города на побережье	6800	x	$\frac{6800}{x}$
Обратный путь	6800	$x+5$	$\frac{6800}{x+5} + 5$

Составим и решим уравнение. $t_1 = t_2$, поэтому

$$\frac{6800}{x} = \frac{6800}{x+5} + 5, \qquad \Big| \times x(x+5) \neq 0,$$
$$6800(x+5) = 6800x + 5x(x+5),$$
$$5x^2 + 25x - 6800 \cdot 5 = 0, \qquad \Big| : 5,$$
$$x^2 + 5x - 6800 = 0,$$
$$D = 27225 = 1089 \cdot 25,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{1089 \cdot 25} = 33 \cdot 5 = 165,$$
$$x_1 = -85, \quad x_2 = 80.$$

Итак, скорость дальнобойщика по пути от города к побережью равна 80 км/ч.

Ответ: 80.

Скорость присутствует не только в задачах на движение, но и на сравнительную быстроту выполнения какого-либо задания. Поэтому и математические модели соответствующих задач строятся совершенно аналогично.

4. На сбор 2400 бонусов первый геймер тратит времени на 20 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 20 бонусов в минуту больше?

Решение.

Пусть второй геймер собирает x бонусов в минуту, тогда первый собирает $x + 20$ бонусов в минуту. Табличная версия задачи имеет следующий вид.

	Число бонусов	**Скорость сбора (бонусы/мин)**	**Время сбора (мин)**
Первый геймер	2400	$x+20$	$\dfrac{2400}{x+20}$
Второй геймер	2400	x	$\dfrac{2400}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$t_2 - t_1 = 20,$$

$$\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x+20} = 20,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20} = \frac{20}{2400},$$

$$\frac{x+20-x}{x(x+20)} = \frac{1}{120},$$

$$\frac{20}{x(x+20)} = \frac{1}{120},$$

$$x(x+20) = 20 \cdot 120,$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0,$$

$$x_1 = -60, \quad x_2 = 40.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй геймер собирает 40 бонусов в минуту.

Ответ: 40.

5. Винни Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

Решение.

1-й способ.

Эта задача по мотивам старинной загадки о совместном поедании косули волком, львом и лисой. И в то время вовсе не предполагалось её решать с использованием уравнений. Достаточно использовать понятие наименьшего общего кратного и немного сообразительности.

Вспомним, что наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел — это наименьшее натуральное число, которое без остатка делится на каждое из этих чисел.

$$\text{НОК}(35; 63; 45) = \text{НОК}(5 \cdot 7; 7 \cdot 9; 9 \cdot 5) = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315.$$

Далее поставим вопрос: сколько огородов может полить каждая из рассматриваемых пар за 315 минут? Наглядно ответ можно получить, составив несложную таблицу.

Винни и Пятачок	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	35 мин	Итого 315 мин
Пятачок и Кролик	63 мин	63 мин	63 мин	63 мин	63 мин					Итого 315 мин
Кролик и Винни	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин	45 мин			Итого 315 мин

По табличной версии каждый из участников полива реально работал по $315 \cdot 2 = 630$ мин. И за это время все трое вместе полили бы $9 + 5 + 7 = 21$ огород. Следовательно, один огород всеми тремя дачниками поливается за $630 : 21 = 30$ минут.

Ответ: 30.

2-й способ.

Пусть Винни Пух поливает самостоятельно весь огород (берём его за 1) за B минут, Пятачок — за P минут и Кролик — за K минут. Тогда за одну минуту Винни поливает часть огорода, равную $\frac{1}{B}$, Пятачок — $\frac{1}{P}$, Кролик — $\frac{1}{K}$. Таким образом, фраза о том, что Винни и Пятачок вместе поливают огород за 35 минут, математически выражается следующим уравнением:

$\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P}\right) \cdot 35 = 1$, что равносильно уравнению $\frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}$. Составив аналогично два других уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}, \\ \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{63}, \\ \frac{1}{B} + \frac{1}{K} = \frac{1}{45}; \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы, получим:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{9}{315} + \frac{5}{315} + \frac{7}{315},$$

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{21}{315},$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{30},$$

$$30\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = 1.$$

Последнее равенство означает, что Винни, Пятачок и Кролик польют вместе огород за 30 минут.

Ещё один из классических видов школьных текстовых задач — задачи, в которых насосы или трубы наполняют бассейны, баки или что-то ещё.

6. Бак летнего душа объёмом 600 литров можно заполнить одним из двух насосов. Первый закачивает на 5 литров в минуту больше, чем второй и поэтому на заполнение всего бака тратит на 6 минут меньше второго насоса. Определите, сколько литров в минуту закачивает второй насос.

Решение.

Пусть второй насос закачивает $\boldsymbol{x}$ литров в минуту, тогда первый — $\boldsymbol{x+5}$ литров в минуту. Заполним следующую таблицу.

	Скорость закачки (л/мин)	**Объём бака (л)**	**Время наполнения (мин)**
1-й насос	$x + 5$	600	$\frac{600}{x+5}$
2-й насос	x	600	$\frac{600}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$t_2 - t_1 = 6,$$
$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+5} = 6,$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{6}{600},$$
$$\frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{1}{100},$$
$$\frac{5}{x(x+5)} = \frac{1}{100},$$
$$x(x+5) = 500,$$
$$x^2 + 5x - 500 = 0,$$
$$x_1 = -25, \quad x_2 = 20.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй насос закачивает 20 литров в минуту.

Ответ: 20.

? *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью на 16 км/ч меньшей, чем скорость первого байкера, а вторую половину пути со скоростью 120 км/ч. В результате в другой город байкеры приехали одновременно. Найдите скорость первого байкера. Ответ дайте в км/ч.

2. Рыбонадзорный катер патрулирует вдоль участка реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. На сбор 1800 бонусов первый геймер тратит времени на 6 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 10 бонусов в минуту больше?

4. Петя и Вася красят вместе забор за 12 часов. Вася и Коля красят вместе этот же забор за 20 часов. Коля и Петя красят этот же забор за 15 часов. За сколько часов покрасят этот же забор Петя, Вася и Коля, работая одновременно?

5. Дачный бассейн, объёмом 15 000 л первый насос заполняет на 20 минут дольше, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 200 л в минуту больше?

6. На изготовление 200 деталей первый рабочий затратил времени на 10 мин меньше, чем второй на изготовление 360 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий, если второй изготавливает на 2 детали в минуту меньше?

Вариант 2

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь со скоростью 96 км/ч. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч. С какой скоростью пришлось ехать второму байкеру вторую половину пути, если в другой город они приехали одновременно. Ответ дайте в км/ч.

2. Катер проплыл по течению реки от пристани A до пристани B расстояние в 437 км. Против течения реки он плыл на 4 часа дольше, чем по течению. Найдите скорость катера в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 10 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 10 бонусов в минуту больше?

4. Катя и Таня вместе могут вымыть окно за 15 минут. Таня и Настя могут вымыть это же окно за 21 минуту. Настя и Катя моют это окно за 35 минут. За сколько минут могут вымыть окно Катя, Таня и Настя, если будут мыть его вместе?

5. Бассейн объёмом 18 000 л первый насос наполняет на 10 минут медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает в минуту на 300 л больше?

6. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за время, которое второй рабочий потратит на изготовление 180 таких же деталей. За сколько минут оба рабочих, работая вместе изготовят 760 таких же деталей, если первый изготавливает на 2 детали в минуту больше, чем второй?

Вариант 3

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной

скорость. Второй проехал первую половину пути со скоростью на 16 км/ч меньшей, чем скорость первого байкера, а вторую половину пути, со скоростью на 24 км/ч больше скорости первого байкера. В результате в другой город байкеры приехали одновременно. Найдите скорость первого байкера. Ответ дайте в км/ч.

2. Экипаж дальнобойщиков проезжает расстояние 6375 км с определённой скоростью без остановок. На обратном пути он планирует сделать остановку на 10 часов для отдыха. Для этого на обратном пути ему необходимо увеличить скорость на 10 км/ч по сравнению с прямым маршрутом. Найдите (в км/ч) значение первоначальной скорости .

3. На сбор 3640 бонусов первый геймер тратит времени на 9 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 9 бонусов в минуту больше?

4. Малыш и Карлсон вместе съедают торт за 20 минут. Карлсон и Фрэкин Бок съедают вместе этот же торт за 30 минут. Фрэкин Бок и Малыш съедают этот же торт за 24 минуты. За сколько минут съедят этот торт Малыш, Карлсон и Фрэкин Бок, если будут есть его все вместе?

5. Бак летнего душа, объёмом 800 л первый насос закачивает на 24 минуты медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 30 л в минуту больше?

6. Двое рабочих, работая вместе, изготавливают 760 деталей за 20 минут. Первый, работая один, изготавливает 200 таких же деталей за то же время, за какое второй изготавливает

180 таких же деталей. На сколько деталей в минуту первый рабочий изготавливает больше, чем второй?

Вариант 4

1. Двое велосипедистов выехали одновременно из города к турбазе. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй велосипедист первую половину пути проехал со скоростью 30 км/ч, а вторую на 4 км/ч меньше, чем скорость первого велосипедиста. На турбазу оба приехали одновременно. Найдите скорость первого велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.

2. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 50 минут меньше, чем второй на сбор 5500 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 5 бонусов в минуту больше?

3. Полежайкин и Галина Сергеевна съедают пиццу за 42 минуты. Галина Сергеевна и Пуговка съедают вместе эту же пиццу за 56 минут. Пуговка и Полежайкин съедают эту же пиццу за 48 минут. За сколько минут съедят эту пиццу Полежайкин, Галина Сергеевна и Пуговка, если будут есть её вместе?

4. Скорость катер береговой охраны в неподвижной воде равна 20 км/ч. Путь длиной 396 км по течению реки он проплывает на 4 ч быстрее, чем против течения реки. Найдите скорость течения реки (в км/ч).

5. Сестра вышла из дома на 1 мин 40 с раньше брата. Тем не менее в школу, находящуюся на расстоянии 300 м от дома они пришли одновременно. Определите время движения сестры

(в мин), если скорость брата на 0,5 м/с больше скорости сестры.

6. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за 10 минут. Вместе со вторым рабочим они изготавливают 760 деталей за столько же минут, за сколько второй, работая один, изготавливает 360 деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает второй рабочий?

Вариант 5

1. Двое велосипедистов выехали одновременно из турбазы в город. Первый проехал весь путь с некоторой постоянной скоростью. Второй велосипедист первую половину пути проехал со скоростью 20 км/ч, а на второй половине его скорость была на 6 км/ч больше скорости первого велосипедиста. В город оба приехали одновременно. Определите скорость второго велосипедиста на второй половине пути. Ответ дайте в км/ч.

2. На сбор 4000 бонусов первый геймер тратит времени столько же, сколько второй на сбор 3600 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 4 бонуса в минуту больше?

3. Кот Матроскин и Шарик выпивают вместе бак молока за 56 минут. Шарик и Дядя Фёдор выпивают этот же бак молока за 72 минуты. Дядя Фёдор и Кот Матроскин выпивают этот же бак молока за 63 минуты. За сколько минут выпьют этот бак молока Кот Матроскин, Шарик и Дядя Фёдор, если будут делать это одновременно?

4. Катер береговой охраны патрулирует участок реки длиной 396 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость катера в неподвижной воде (в км/ч), если против течения катер проплывает патрулируемый участок на 4 часа медленнее, чем по течению.

5. Расстояние от дома до школы, равное 300 м, брат проходит на 1 мин 40 с быстрее, чем сестра. Определите скорость брата (в м/с), если скорость сестры на 0,5 м/с меньше, чем скорость брата.

6. Первый и второй рабочий, работая вместе, изготавливают 38 деталей в минуту. 200 таких же деталей первый рабочий изготавливает за то же время, за которое второй изготавливает 180 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий самостоятельно?

Вариант 6

1. Найдите значение выражения $6^{\sqrt{6}+1} \cdot 6^{2-\sqrt{6}}$.

2. Найдите значение выражения $(3x-8)(3x+8)-9x^2+8x+74$ при $x = 126$.

3. На рисунке 53 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (5x^2-12x+12)e^{x+12}$

5. Первый рабочий обрабатывает 600 деталей на 10 минут быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в минуту обрабатывает второй рабочий, если первый обрабатывает на 10 деталей в минуту больше?

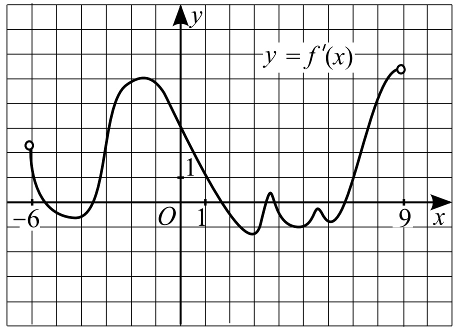


Рис. 53.

6. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 20t - 5t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 7,2 метров.

Вариант 7

1. Найдите значение выражения $\sqrt{505^2 - 456^2}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

3. На рисунке 54 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

4. Найдите точку минимума функции $y = (6x^2 - 3x + 3)e^{8-x}$.

5. Катер береговой охраны заступил в наряд в 18 : 00 и проплыл по течению реки 240 км. Задержавшись на 2 часа, он отправился в обратный путь против течения реки и прибыл в начальный пункт в 18 : 00 на следующие сутки. Определите

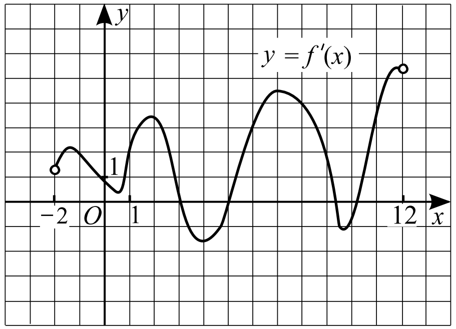


Рис. 54.

скорость катера в стоячей воде (в км/ч), если скорость течения реки 2 км/ч.

6. В розетку электросети подключён прибор с сопротивлением 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R задаётся формулой $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом.

Вариант 8

1. Найдите значение выражения $16\log_{625}\sqrt{25}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

3. На рисунке 55 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней.

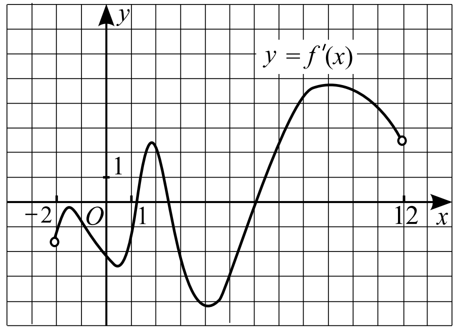


Рис. 55.

4. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x^2 + x - 5\ln x + 7$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}\right]$.

5. Аня, Таня и Яна вместе чистят мешок картошки за 42 мин. Аня и Таня чистят такой же мешок картошки за 56 мин. Таня и Яна чистят такой же мешок картошки за 72 мин. За сколько минут почистят такой же мешок картошки Аня и Яна?

6. Коэффициент полезного действия тепловой машины Карно определяется формулой $\eta = \dfrac{T_H - T_X}{T_H}$, где T_H — температура нагревателя, а $T_X = 200$ K — температура холодильника. При каком наименьшем значении температуры нагревателя (в K) КПД этого двигателя будет составлять не менее 0,6?

Вариант 9

1. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{3xy^2}{(2x)^3y}\cdot\dfrac{4x^4y^2}{x^2y^3}$.

3. На рисунке 56 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[3; 7]$.

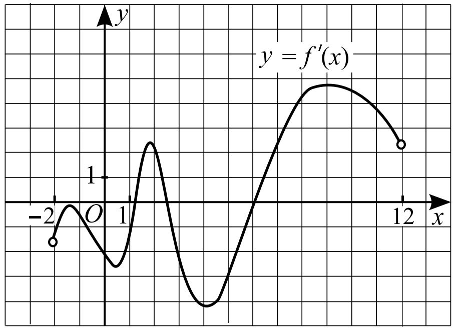


Рис. 56.

4. Найдите точку максимума функции $y = (x-5)^2e^{x+8}$.

5. Первый байкер проехал путь из столицы до провинциального городка с некоторой постоянной скоростью. Скорость второго байкера, выехавшего одновременно с первым по тому же маршруту, в первой половине пути была равна 70 км/ч. Во второй половине пути второй байкер ехал со скоростью на 39 км/ч больше постоянной скорости первого байкера. В результате в городок они приехали одновременно. Найдите скорость второго байкера (в км/ч) во второй половине пути.

6. Зависимость температуры T (в градусах Кельвина) от времени t (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T = a + bt + ct^2$, где $a = 310$ К, $b = 30$ К/мин, $c = -0,1$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2200 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

Вариант 10

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{64\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a}}$ при $a > 0$.

2. Найдите значение выражения $13\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

3. Прямая $y = -24x + 12$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{5x}{\pi} + 5\operatorname{tg} x - 4$

на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

5. Первый геймер собрал 6000 бонусов за определённое время. Одновременно с ним начал собирать бонусы второй геймер. Через 1 ч второй геймер сделал перерыв на 60 мин и снова сел за свой компьютер. В результате они собрали по 6000 бонусов одновременно. Сколько бонусов в минуту собирал в среднем первый геймер, если второй собирал в среднем на 5 бонусов в минуту больше?

6. В боковой стенке бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота h столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 75 - 20t + t^2$, где t — время в секундах. Через сколько секунд вода вытечет из бака?

Вариант 11

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{2}{7} + 2\frac{5}{14}\right) \cdot 1{,}4$.

2. Найдите $\frac{5\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0{,}4$.

3. На рисунке 57 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

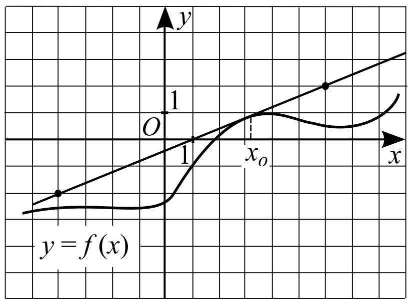


Рис. 57.

4. Найдите точку максимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

5. Аня и Таня чистят мешок картошки за 56 мин. Таня и Яна чистят такой же мешок картошки за 72 мин. Аня и Яна чистят такой же мешок картошки за 63 мин. За сколько минут

почистят такой же мешок картошки Аня, Таня и Яна, работая вместе?

6. Зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (руб.) данного предприятия задаётся формулой $q = 270\,000 - 15\,000p$. Найдите минимальный уровень цены p, при котором значение выручки предприятия $s = p \cdot q$ за месяц составит не менее 1 200 000 рублей.

Вариант 12

1. Найдите значение выражения $\frac{9^{2,44}}{81^{0,22}}$.

2. Найдите значение выражения $(7a^3 \cdot b^6 + (ab^2)^3) : (2a^3b^4)$ при $b = -2$.

3. Прямая $y = 56$ параллельна касательной к графику функции

$y = x^2 - 21x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+11) + 4$.

5. При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 65$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 52 м? Ответ выразите в км/с.

6. Катер рыбнадзора патрулирует участок реки длиной 240 км с 4 : 00 по течению реки. Задержавшись на перерыв в течение 2 ч, он начинает плыть против течения реки и прибывает в начальный пункт в 4 : 00 на следующие сутки. Определите скорость течения реки (в км/ч), если скорость катера в неподвижной воде равна 22 км/ч.

Вариант 13

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

2. Найдите значение выражения $2f(x-3) - f(2x)$, если $f(x) = x - 3$.

3. На рисунке 58 изображён график функции. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -3. Найдите $f'(-3)$.

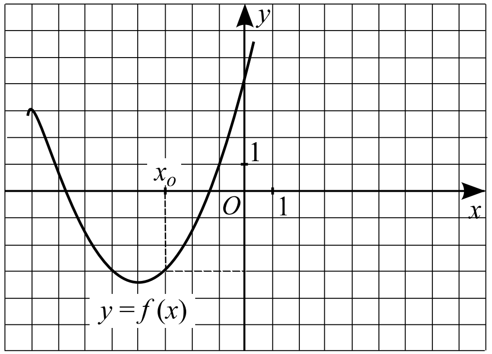


Рис. 58.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x+1)^2 e^{11-x}$.

5. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к направлению движения. Мощность (в киловаттах) трактора равна $N = Fv\cos\alpha$, скорость $v = 4$ м/с. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 160 кВт?

6. Первый байкер проехал путь из города в деревню с постоянной скоростью 91 км/ч. Второй байкер, выехав одновременно с первым, первую половину того же пути ехал со скоростью 70 км/ч, затем увеличил скорость и, в результате приехал в ту же деревню одновременно с первым байкером. Найдите скорость второго байкера (в км/ч) во второй половине пути.

Вариант 14

1. Найдите $3\operatorname{tg}(3\pi - \gamma) - 5\operatorname{tg}(3\pi + \gamma)$, если $\operatorname{tg}\gamma = 3$.

2. Найдите $\dfrac{a}{b}$, если $\dfrac{2a+3b}{4a+b} = \dfrac{2}{3}$.

3. Прямая $y = -18x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 42x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Найдите точку максимума функции $y = 3\ln(x+11) - 15x + 4$.

5. Автомобиль, масса которого равна $m = 3300$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $s = 400$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \dfrac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 6600 Н. Ответ выразите в секундах.

6. Через первую трубу резервуар объёмом 4000 л наполняется на 20 мин быстрее, чем через вторую трубу. За сколько минут обе трубы вместе наполнят резервуар объёмом 9000 л, если через первую трубу поступает воды на 10 л в минуту больше, чем через вторую?

Вариант 15

1. Найдите значение выражения $3\cos\dfrac{5\pi}{4}\sin\dfrac{7\pi}{4}$.

2. Найдите значение выражения
$\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2-8a+16}$ при $3\leqslant a\leqslant 4$.

3. На рисунке 59 изображён график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

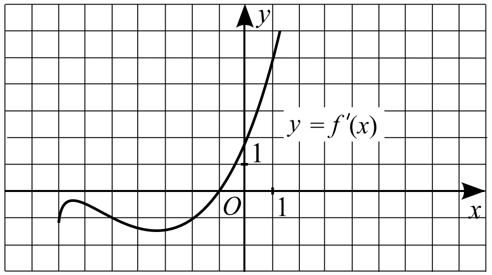


Рис. 59.

4. Найдите наименьшее значение функции

$y=\dfrac{24x}{\pi}-5\sin x-35$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$.

5. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,5}=const$, где p (атм.) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 68,4 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 27 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

6. Двое рабочих, работая вместе, обрабатывают 900 деталей за 20 мин. Сколько деталей в минуту обрабатывает первый рабочий, если 200 деталей он обрабатывает за то же время, за которое второй обрабатывает 250 деталей?

Вариант 16

1. Найдите значение выражения $\dfrac{3}{\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{5\pi}{3}}$.

2. Найдите значение выражения $x+\sqrt{x^2-6x+9}$ при $x\leqslant 3$.

3. На рисунке 60 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

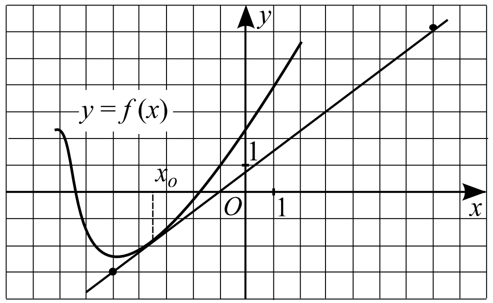


Рис. 60.

4. Найдите точку максимума функции $y=(x+4)^2e^{x-4}$.

5. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?

6. Первый геймер собирает 4000 бонусов за тоже время, за какое второй геймер собирает 5000 бонусов. За какое время (в минутах) они вместе соберут 18000 бонусов, если второй собирает на 5 бонусов в минуту больше, чем первый?

Вариант 17

1. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{6}{7}} - \sqrt{6\frac{3}{7}}\right) : \sqrt{\frac{5}{7}}$.

2. Найдите $2g(y) - 10y + 3$, если $g(y) = 5y - 7$.

3. Прямая $y = 6x - 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 2x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 7x - 7)e^{7-x}$.

5. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 20$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 320$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии

воздуха совершается работа не более чем 117 120 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

6. Две трубы вместе закачивают резервуар объёмом 9000 л за 1 ч 40 мин. Первая труба закачивает на 10 л в минуту больше, чем вторая труба. За сколько минут первая труба самостоятельно наполнит резервуар объёмом 4000 л?

Ответы

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

B7. Вычисления и преобразования

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	15,6	81	25	0,6	−0,5	264	8,5	0,95
Вар. 2	16,9	0,25	12	0,16	45	3	−18	0,5
Вар. 3	243	0,7	28	10	7	25	4	1,75
Вар. 4	2,5	3	144	1	3	2	8	−3,5
Вар. 5	539	−1	2	440	9	8	−8	0,5
Вар. 6	339	1	−11	8	9,5	0,875	1	1

B8. Производная и исследование функций

	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	1	−7	6	4	1	0,5
Вар. 2	0	5	5	1	2	0,75
Вар. 3	27	3	1	8	−10	1
Вар. 4	−4	4	−6	2	3	2
Вар. 5	−5,5	5	−3	−14	24	2
Вар. 6	1	6	5	7	4	−0,5

B10. Прикладные задачи

	1	2	3	4
Вар. 1	8	5	20	450
Вар. 2	80	1800	3,75	50
Вар. 3	2000	60	2,2	15
Вар. 4	300	8,8	90	5
Вар. 5	240 000	20	0,25	1,6
Вар. 6	15	12	120	0,5

B11. Наибольшие и наименьшие значения функций

	1	2	3	4
Вар. 1	−6	4	−3	−25
Вар. 2	10	2	31	30
Вар. 3	2	−88	−3	36
Вар. 4	8	−146	80	−22
Вар. 5	15	−14	11	2

B12. Построение и исследование математических моделей

	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	96	1	50	10	300	20
Вар. 2	120	21	50	14	600	20
Вар. 3	96	75	56	16	20	2
Вар. 4	24	55	32	2	5	18
Вар. 5	30	36	42	20	1,5	20

Ответы к заданиям тренировочных тестов

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Вар. 1	216	1018	5	0	20	3,2
Вар. 2	217	1,5	2	0,5	22	30
Вар. 3	4	3	4	10	63	500
Вар. 4	−1	1,5	6	3	130	90
Вар. 5	8	6,5	−14	2,25	20	5
Вар. 6	3,7	−3,125	0,4	−1	42	8
Вар. 7	81	16	10,5	−10,5	180 000	2
Вар. 8	−4	−9	1	−1	60	130
Вар. 9	−24	3,5	−30	−10,8	20	100
Вар. 10	1,5	1	−1	−36,5	7,6	20
Вар. 11	−4	3	0,75	−6	15	400
Вар. 12	−1	−11	2	9	4,8	80