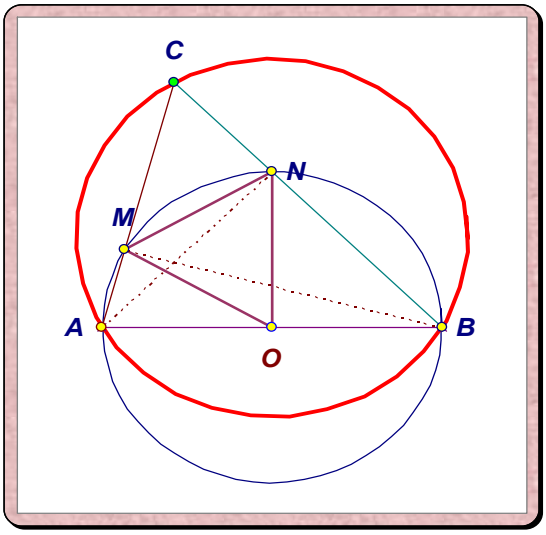
ИЗДАТЕЛЬСТВО «УЧИТЕЛЬ»

Шеховцов В.А.

Романтика математических олимпиад

(учебно-методическое пособие)



ВОЛГОГРАД
2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО «УЧИТЕЛЬ»

Шеховцов В.А.

Романтика математических олимпиад

(учебно-методическое пособие)

Волгоград
2008

УДК
БКК

Автор-составитель В.А. Шеховцов

Романтика математических олимпиад
(Учебно-методическое пособие)
Авт.-сост. В.А. Шеховцов. – Волгоград: Учитель,
2008. -100с.

Рецензенты:

Учебно-методическое руководство:

Технический редактор, верстка

В настоящем пособии обобщается опыт работы преподавателя Шеховцова Виктора Анатольевича в школах Юга России по подготовке учащихся к математическим олимпиадам, фестивалям и конференциям, по организации и проведению Международного Математического Турнира Городов. Исследуется проблема оптимального использования развивающего потенциала нестандартных заданий, их роли и места в современном образовании. Пособие рекомендовано учителям математики и студентам педагогических вузов.

© Шеховцов В.А., 2008.
© Издательство «Учитель»
© Оформление. Издательство «Учитель».

Содержание

Введение…….…..6

Глава 1. Звёзды прошлых олимпиад……13

Глава 2. Радость творческого поиска……27

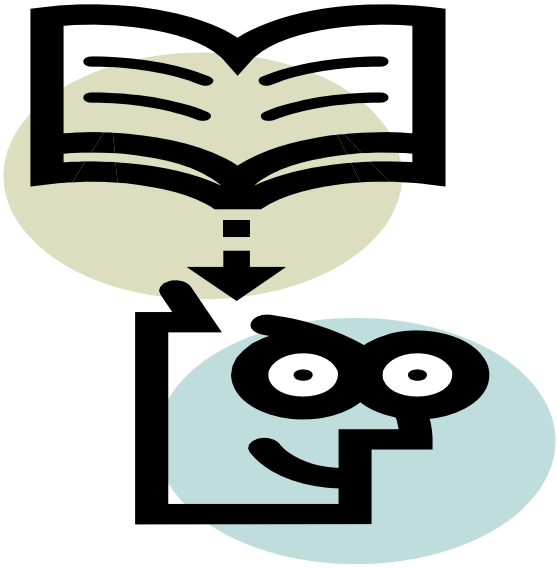
Глава 3. Основная равносильность геометрии масс……..60

Глава 4. Краткий обзор некоторых классов олимпиадных задач……70

Задачи для самостоятельного исследовательского поиска……..80

Ответы, указания……91

Информационные ресурсы……97



Введение.

Развивающий потенциал нестандартных олимпиадных задач неисчерпаем. Одни авторы преподносят такие задачи как эффектную рекламу математических идей, в виде красивых, неожиданных решений. У других это важнейшее средство для расширения математических знаний, развития эвристического мышления, повышения логической культуры. Несомненна польза занимательных, нестандартных заданий для того, чтобы сделать даже просто обычные уроки нескучными, душевно комфортными и при этом чрезвычайно насыщенными и эффективными. Бесспорна роль олимпиад в раскрытии творческого потенциала участника, в расширении его кругозора, развитии интереса к изучению предмета, в выявлении одарённых, творчески мыслящих учащихся, имеющих нестандартное мышление.

Хочется верить, что особая энергетика математических олимпиад всегда будет привлекать достаточное количество желающих. И любая квалифицированная помощь в этом направлении будет актуальна. Решать самостоятельно и изучать решения других. Видимо наивно полагать, что кто-то, когда-то, где-то даст окончательный универсальный рецепт решения любых нестандартных заданий. Если бы это произошло, само словосочетание «нестандартная задача» потеряло бы смысл. А главное – исчезла бы романтика творческого поиска, вдохновения и озарения.

Говорить о методике подготовки к участию в олимпиадных соревнованиях можно только на основе обобщения собственного конкретного опыта, подкреплённого достаточно весомыми реальными результатами.

Должен ли преподаватель, берущийся за подготовку школьников к математическим турнирам сам уметь с ходу решать любые нестандартные задания? Кого можно назвать умеющим решать нестандартные задачи? Того, кто решит любую задачу за достаточно короткое время? Но, скорее всего, таких людей нет. Нестандартные задачи могут быть побочными результатами математических исследований на переднем крае современной науки. В этом отношении составителям задач работать значительно проще, чем тем, кто отваживается на поиск решения. Более того, некоторые признанные сегодня педагогические авторитеты просто принципиально не возьмутся за решения нестандартных задач, считая для себя это занятие пустой тратой времени. И каждый из них будет по-своему прав. Ведь на самом деле на блестящее, всесторонне безупречное решение иной нестандартной задачи может уйти довольно много времени, а никакого нового знания и умения, лично для них, такое решение не приносит. Без большого риска ошибиться, можно предположить, что нет таких преподавателей, которые способны решить, скажем, за двое суток абсолютно все задачи основного варианта Турнира Городов. Но тот, кто берётся за подготовку учащихся, должен, по крайней мере, иметь в своём арсенале такие задачи собственного решения, которыми он мог бы гордиться.

С точки зрения вышесказанного, возможно, умеющим решать олимпиадные задания можно назвать того, кто этим занимается достаточно регулярно, имеет опыт самостоятельного решения некоторых из них и имеет большое желание решить ещё, хотя бы несколько. Как отмечал Джордж Пойа, нет ничего ценнее собственного опыта решений.

Представляется возможным выделить семь основных, взаимосвязанных факторов, способствующих успешному решению:

- Объём фактических знаний;
- Развитые воображение, фантазия, интуиция;
- Опыт самостоятельных решений;
- Навыки владения основными мыслительными операциями (анализ, синтез, сравнение, сопоставление, обобщение, аналогия и т.д.);
- Знание основных классов нестандартных задач;
- Постоянное совершенствование логических навыков (выдвижение гипотез, построение доказательной структуры, примеры и контрпримеры, выводы и умозаключения);
- Умения изучать, понимать и оценивать решения, предлагаемые другими.

Тогда получается полный граф с семью вершинами (см. рис 1). Исходя из этих позиций, можно строить определённую систему работы по подготовке к олимпиадам.

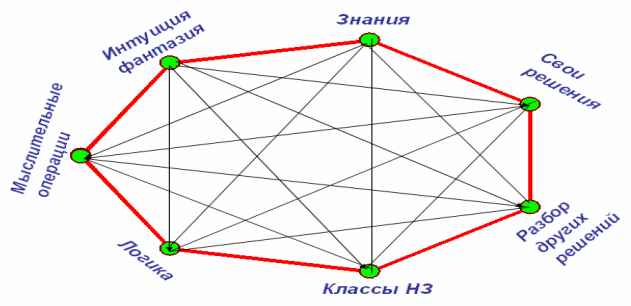


Рис. 1. Полный граф компонентов успешного решения.Пр.1.ppt

Члены центрального жюри Турнира Городов регулярно публикуют на своём сайте тренировочные задачи. В предисловии говориться, что множество нулевых работ связано с тем, что многие учащиеся просто впервые видят подобные задания, отличающихся от стандартных школьных и требующих для решения известной смелости и находчивости. Там же говориться, что польза от разбора решений может быть лишь для тех учащихся, которые предприняли серьёзные усилия для решения задач. Способность долго думать над задачей - одно из главных условий успешной работы в математике. В этой науке можно освоиться, только если сам процесс ученья, в частности решение задач, может доставить радость, несмотря на трудности и неудачи. Постоянная, систематическая совместная творческая деятельность учителя и ученика, направленная на совершенствование навыков решения нестандартных задач составляет ту рутинную повседневную прозу, которая непременно обернётся поэзией и особой романтикой олимпиадной жизни. Это состояние не возможно передать словами, можно лишь почувствовать. По замыслу автора, данное пособие может оказаться полезным для подготовки к участию в математических турнирах любого уровня. В нём представлены задачи различных олимпиад, с образцами их возможных решений, содержится обзор часто встречающихся классов нестандартных заданий, на реальных примерах демонстрируются эвристические приёмы, которые могут привести к верной идее, имеются задачи для самостоятельного исследовательского поиска. Компоновка материала имеет вид удобный для самоконтроля и сравнения своего решения с другими.

Методические рекомендации преподавателям.

1. Желательно ещё до первого занятия дать учащимся для ознакомления две – три интересных, но не самых сложных задачи, дать список рекомендуемой литературы и на первом занятии обсудить решения предложенных заданий;
2. На первом занятии изучить порядок работы и выдать на достаточно продолжительный срок список из 7 – 10 заданий. Сейчас это очень легко сделать, если принимать участия во Всероссийских олимпиадах, предлагаемых различными вузами и математическими школами. Обычно первый этап подобной олимпиады является заочным и его задания рассчитаны на решение за достаточно продолжительное время. Можно также использовать задания прошлых лет Турнира Городов, но при этом, зная о высшем уровне этого турнира, лучше предлагать те задания, которые руководитель когда-то решил самостоятельно или основательно изучил другие решения. Во всех случаях следует учитывать начальный уровень аудитории и осуществлять индивидуальный подход;
3. На последующих занятиях разбираются известные классы нестандартных заданий, приёмы эвристической деятельности, обязательно иллюстрируемые яркими примерами из опыта решений. Основное внимание уделяется обсуждению степени продвижения в задачах для самостоятельного исследовательского поиска. Фиксируются любые, даже самые незначительные успехи участников группы.
4. Делом чести всех слушателей, конечно, является участие в любых возможных олимпиадах и турнирах. Тогда всё внимание группы переключается на эти соревнования и на подробный разбор их решений с обобщением на уже изученные классы нестандартных заданий и эвристические приёмы. В то же время это участие – сугубо добровольное. Нельзя перегружать учеников, которые возможно участвуют и в других предметных олимпиадах.
5. На занятиях в качестве разминки и для настройки интеллектуального тонуса, можно и нужно иногда решать простые задания и головоломки, причём их может предлагать не только руководитель. Полезно любое задание, если оно вызывает искренний интерес и является достаточно поучительным.
6. Перед праздниками или каникулами руководитель может организовать занятие в форме КВН, викторины или конкурса блиц-решений и ответов на вопросы.
7. На заключительном занятии к концу учебного года подводятся итоги деятельности группы и обсуждаются возможные планы на будущее. Возможна итоговая конференции, о которой объявляется заранее и на которой, в качестве зрителей присутствуют все желающие учащиеся их родители, преподаватели и т.д.

Пособие предполагается выпустить в текстовом и электронном вариантах. Последний отличается тем, что можно воспроизвести на мониторе компьютера, мульльтимедийного проектора или интерактивной доски любой рисунок и интерактивную модель некоторых задач, что делает изучение наглядным и динамичным.

В пособии намеренно не указываются точные данные об учениках, их преподавателях, школах и городах, где они учились и работали. Но все о ком идёт речь – абсолютно реальные люди. И всё, что с ними происходило – было и есть на самом деле. Это сделано из соображений элементарной скромности и такта

В первой главе рассматриваются реальные решения реальных учеников. Это сделано для того, чтобы показать особенности нестандартного мышления наиболее сильных учащихся, высокий уровень их самостоятельных умозаключений и обобщений. Это как бы красивые примеры для подражания другим ученикам, стремящимся покорить олимпийские высоты.

Во второй главе автор приводит несколько решений из своей коллекции. Делаются краткие эвристические выводы и некоторые рекомендации, полезные учащимся и учителям.

Третья глава посвящена особому классу нестандартных заданий, связанных с очень красивой и незаслуженно забываемой темой геометрии масс. Даётся краткий обзор теории и практики барицентрического решения.

В четвёртой главе продолжается обзор некоторых других классов нестандартных задач, наиболее часто встречающихся в практике математических соревнований.

В последнем разделе собраны условия задач для самостоятельного исследовательского поиска.

Автор надеемся, что пособие поможет всем желающим с пользой для развития интеллекта, по – настоящему окунуться в увлекательнейший, романтичный и загадочный мир олимпиадных математических задач.

Глава 1. Звёзды прошлых олимпиад.

В данной главе представлены решения реальных учеников некоторых школ Юга России, добившихся в своё время весомых результатов по итогам участия в различных олимпиадах. Названия этих школ и фамилия учеников не указываются, ввиду того, что для многих читателей эта информация не является существенной.

Александр – учитель своих учителей!

Вспоминается случай, когда участники жюри зональной олимпиады – лучшие математики региона, затруднялись решать некоторые, наиболее сложные задания. Их успокоила директор одной из школ:

- Не волнуйтесь, Саша обязательно решит и всё нам подробно объяснит!

В этом была одна из характерных особенностей Александра. С некоторых пор он, щадя учителей, так описывал свои решения, чтобы ни у кого не возникло никаких вопросов. Одним из ярких примеров может служить следующая задача.

№ 1. Все числа следующего ряда: 0; 4; 18; 48; ?; 180 получены по некоторой формуле. Определите эту формулу и неизвестное число. (Краевая олимпиада 1991 г., 8 кл).

Вот дословные рассуждения Александра. Пусть неизвестное число x. Приращения функции $f(x)$: $4;\ 14;\ 30;\ x-48;\ 180-x$ не равны между собой, значит, данная функция не линейная. Приращения нового ряда (т.е. приращения приращений): $10;\ 16;\ x-78;\ 228-2x$. Они тоже не равны между собой, значит, степень больше двух (речь идёт о квадратичной функции). Приращения нового ряда: $6;\ x-94;\ 306-3x$. Они могут быть равны, если совместна следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x-94=6 \\ 306-x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=100.$$

Можно предположить, что неизвестная функция – многочлен третьей степени и неизвестное число равно 100. Пусть функция задана формулой: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, тогда:

$$f(0)=0=d;\ f(1)=4=a+b+c+d;$$

$$f(2)=18=8a+4b+2c+d;$$

$$f(3)=48=27a+9b+3c+d.$$

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=4 \\ 8a+4b+2c+d=18 \\ 27a+9b+3c+d=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$$

$$f(x)=x^3+2x^2+x.$$

Таким образом, Александр, учась тогда в 7 классе, использовал метод неопределённых коэффициентов – материал, изучаемый на первых курсах вузов!

Для сравнения, решение оргкомитета: искомая функция $y=n^2(n-1)$, при $n=5,\ y=100$. Стоит ли удивляться, что Саша, за своё решение сразу попал в зону особого внимания центрального оргкомитета!

Еще одно задание, которое было решено Александром с ходу, сразу после того, как он его увидел на факультативном занятии.

№ 2. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырёх. (12-й Турнир Городов, осенний тур 1990 г. Тренировочный вариант, 8-9 кл).

Решение.

$$\begin{cases} ab>a+b \\ a>0 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1+\dfrac{b}{a} \\ b>1+\dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow a+b>2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>4.$$

Последнее неравенство является очевидным, так как справедливо неравенство:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

Причем равенство возможно только при $a=b$, но тогда $a^2>2a,\ a>2,\ a+a>4$. Самое интересное заключается в том, что об этом неравенстве руководитель факультатива рассказывал ученикам за неделю до занятия. Но у него имелось в виду совершенно другое решение.

Невероятная интуиция Бори.

Этот мальчик поражал умением угадать некоторые решения, в основе которых лежат такие вопросы высшей математики, о которых ученик 8 класса просто по определению не может иметь даже элементарного понятия.

Задание № 3. Числовой ромб строится следующим образом: в первой строке – одна единица, во второй – две двойки, в третьей – три тройки, и так далее, до n – й строки. Затем, число чисел в каждой следующей строке уменьшается на единицу, пока в последней строке не останется одно число, равное 2n – 1. Чему равна сумма всех чисел такого ромба? («Квант» № 8, 1991 г. Задания для младших школьников).

Решая эту задачу, Борис проявил чудеса наблюдательности и аккуратность тождественных преобразований. (См. рис. 2.).

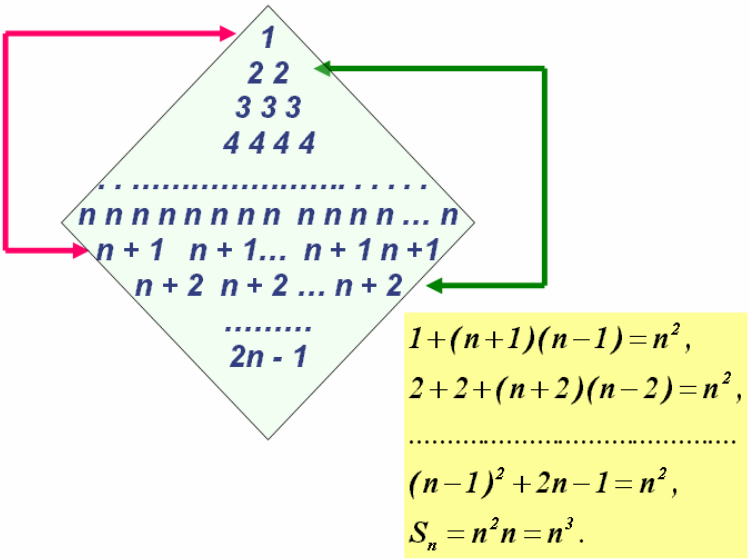


Рис. 2. Сумма чисел числового ромба. Гл.1-3-2.ppt

То есть первую строку складываем с ***(n + 1) – й***, вторую – с ***(n+2) – й***, и так далее. Дальше всё предельно ясно, просто и логично!

Следующая – типичная задача на геометрию масс (это было по начальному замыслу автора), но Боря рассудил по-своему, не зная тогда ещё ни о геометрии масс, ни тем более о проективной геометрии!

Задание № 4. В треугольнике ABC, N – середина медианы AM. Луч BN пересекает сторону AC в точке K. Найдите отношение длин отрезков AK и KC. («Квант» № 8, 1991 г. Задачи для младших школьников).

Автор объяснил ученикам, как решить эту задачу барицентрическим методом, поместив в точки B и C массы 1, а в точку A – массу 2. Тогда в точке N будет центр масс системы трёх материальных точек, и далее всё достаточно просто. А Борис попросил разрешения показать своё решение, которое нашёл сам моментально, но в котором сомневается. Рассмотрим ход его рассуждений.

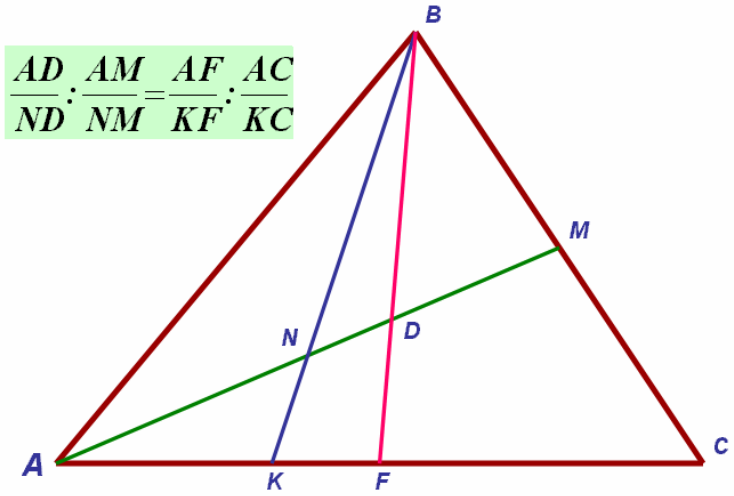


Рис. 3. Сложное отношение четырёх точек. Гл.2-4-3.ppt

Боря провёл ещё одну медиану BF, которая пересекает медиану AM в точке D. Следовательно MD : DA = 1: 2. Далее, так как AF = FC, AN = NM, то ему показалось совершенно очевидным, что точка K делит отрезок AC в том же отношении, что и точка D отрезок AM, то есть в отношении 1: 2. Откуда у него была такая уверенность, вероятно известно лишь Богу! Ответ получился верным, но рассуждения убедили далеко не всех слушателей факультатива. Я пообещал дома спокойно разобраться в решении Бориса. Оказалось, что оно безупречно, если не считать одного «но». Но решение основано на фундаменте проективной геометрии – сохранении сложного отношения четырёх точек при проективном преобразовании! В данном случае речь идет о проективном отображении отрезка AM на отрезок AC с центром B. Тогда имеет место соотношение, показанное на рисунке 3. Из него действительно очень просто получить пропорцию AK:KC = 1:2. Секрет разгадки такой поразительной интуиции – очевидно в компетенции современных психологов!

Евгений. Решения без шансов для оппонентов.

Члены жюри зональной олимпиады 1994 года были просто в шоке, после проверки закодированных работ восьмиклассников. Один из учеников опередил остальных сразу на 8 баллов, и это оказался не ученик школы одарённых детей (всех их учителя давно прекрасно знали по почерку)! Более того, как выяснилось чуть позже, он в данное время учился лишь в шестом классе! Эффект можно было сравнить, пожалуй лишь с удивлением канадских профессионалов, проигравшим нашим хоккеистам со счётом 0:6 и с удивлением узнавших после матча, что на воротах стоял не Третьяк, а Мышкин! Всем хотелось поскорее познакомиться с новым вундеркиндом!

К одному из членов жюри в коридоре подошла молодая женщина с маленьким, белёсым скромным, тихим мальчиком и спросила, нельзя ли записать её сына на математический факультатив. Учитель сказал, что конечно можно и даже нужно и спросил фамилию ребёнка. Узнав, что это и есть таинственный Евгений – блестящий победитель, только что закончившейся олимпиады, он с восторгом тут же схватил его за руку и буквально потащил в кабинет директора школы! Вскоре в школе одного из ближайших сёл стало одним учеником меньше! А всего через год Евгений уже беседовал на английском языке со сверстником из Ковентри Хью Робинсоном на Летней Международной Математической Конференции Турнира Городов в Югославском городе

Нови Сад! Из многочисленных решений, которые Женя оставил после себя, приведём здесь лишь два, но такие, которые были характерны только для него.

№ 5. Найдите какие – нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары чисел. (16-й Турнир Городов, осенний тур 1994 г., 8-9 кл.).

Как отметило центральное жюри оргкомитета, Евгений стал единственным участником (в Мире!) кто к этой задаче дал вычислительные формулы. Другие просто приводили конкретные примеры без особых обоснований, что тоже, конечно было сделать очень сложно. Вот начало его рассуждений.

$$p-q=НОД(p;q)\Rightarrow p=(p-q)k;$$

$$p=pk-qk,\quad qk=pk-p=p(k-1),\Rightarrow \frac{q}{p}=\frac{k-1}{k}.$$

Следовательно, нужно найти такие пять чисел, чтобы любые два из них можно было бы представить в виде

$$\frac{q}{p}=\frac{k-1}{k}\quad или\quad \frac{q}{p}=\frac{l}{l+1}. \qquad (1)$$

И далее Евгений приводит свои вычислительные формулы, поразившие весь математический мир, логика составления которых понятна лишь ему одному! Но в последствии строго доказывает, что они полностью отвечают условию задачи и, следовательно, их корректность – вне всяких сомнений.

$$\left[\begin{array}{l} m\equiv 0(mod\ 3) \\ m\equiv 2(mod\ 3)\end{array}\right.$$
$$\begin{aligned} a&=m(m+1)(m+2)(m+3),\\ b&=m(m+1)(m+2)(m+4),\\ c&=m(m+1)(m+3)(m+3),\\ d&=m(m+2)(m+2)(m+3),\\ e&=(m+1)(m+1)(m+2)(m+3).\end{aligned} \qquad (2)$$

Теперь нужно проверить 4+3+2+1=10 возможных попарных отношений на справедливость формул (1). Некоторые из них очевидны, другие требуют дополнительных доказательств.

$$\frac{a}{b}=\frac{m+3}{m+4};\quad \frac{a}{c}=\frac{m+2}{m+3};\frac{a}{d}=\frac{m+1}{m+2};\frac{a}{e}=\frac{m}{m+1}.$$

$$\frac{b}{c}=\frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)^2}=\frac{m^2+6m+8}{m^2+6m+9}\quad (ok!)$$

$$\frac{b}{d}=\frac{(m+1)(m+4)}{(m+2)(m+3)}=\frac{m^2+5m+4}{m^2+5m+6}=\frac{k}{k+2}.$$

Последнюю дробь можно сократить на 2, так как ***k*** – чётное число. Дело в том, что ***k = (m+1)(m+4)*** и при любом натуральном ***m*** один из двух сомножителей является чётным. Тогда:

$$\frac{b}{d}=\frac{k}{k+2}=\frac{2l}{2l+2}=\frac{l}{l+1}.$$

Далее:

$$\frac{b}{e}=\frac{m(m+4)}{(m+1)(m+3)}=\frac{m^2+4m}{m^2+4m+3}=\frac{k}{k+3}.$$

Последнюю дробь можно сократить на три, так как, по условию (2) число ***m*** либо кратно трём, либо при делении на три даёт остаток 2, но в любом их этих случаев один из сомножителей произведения ***m(m+4)*** кратен трём. Итак:

$$\frac{b}{e}=\frac{k}{k+3}=\frac{3l}{3l+3}=\frac{l}{l+1}.$$

Далее:

$$\frac{c}{d}=\frac{(m+1)(m+3)}{(m+2)^2}=\frac{m^2+4m+3}{m^2+4m+4},\quad (ok!),$$

$$\frac{c}{e}=\frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)}=\frac{m^2+3m}{m^2+3m+2}=\frac{k}{k+2}=\frac{2l}{2l+2}=\frac{l}{l+1},$$

$$\frac{d}{e}=\frac{m(m+2)}{(m+1)^2}=\frac{m^2+2m}{m^2+2m+1},\quad (ok!).$$

Соответствие формул (2) условию задачи полностью доказана. Остаётся составить конкретный пример пяти натуральных чисел. К примеру, при ***m = 2***, (опять же из условия (1)) получается следующий набор:

$$a=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120;$$
$$b=2\cdot 3\cdot 4\cdot 6=144;$$
$$c=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5=150;$$
$$d=2\cdot 4\cdot 4\cdot 5=160;$$
$$e=3\cdot 3\cdot 4\cdot 5=180.$$

В этом решении Женя ведёт себя как истинный капитан команды – участницы математического боя. Доклад решения в идеале должен быть таким, чтобы оппонент не мог обнаружить ни одной «дырки» и не получить ни одного балла. Так часто и случалось!

№ 6. Прямая отрезает от правильного 10 – угольника ABCDEFGHIJ со стороной 1 треугольник Q_1AQ_2 , в котором $Q_1A + AQ_2 = 1$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок $Q_1 Q_2$ из вершин B, C, D, E, F, G, H, I, J. (16 Турнир Городов, весенний тур, 1995 г., 8-9 кл.).

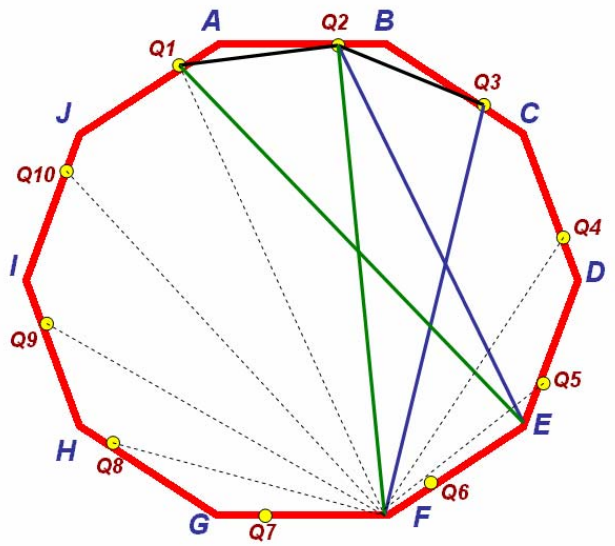


Рис. 4. Чертёж к задаче № 6.

Гл.2-6-4.ppt

Сначала Евгений добавляет ещё 8 точек на сторонах 10-угольника: Q_3, Q_4,…Q_{10} такие, что $Q_3C = Q_4D = \ldots = Q_{10}J$. Затем филигранно доказывает равенство треугольников Q_1Q_2E и Q_2Q_3F. Из равенства треугольников Q_1AQ_2 и Q_2BQ_3 следует равенство сторон $Q_1Q_2 = Q_2Q_3$, из равенства пятиугольников Q_1ABCDE и Q_2 BCDEF следует равенство сторон Q_1E и Q_2F, из равенства четырехугольников Q_2BCDE и Q_3CDEF следует равенство сторон Q_2E и Q_3F. Следовательно, треугольники Q_1Q_2E и Q_2Q_3F равны по трём сторонам. Следовательно, угол Q_1EQ_2 равен углу Q_2FQ_3. Аналогично можно перебросить и все другие углы из условия задачи в вершину F. Тогда искомая сумма углов равна внутреннему углу правильного десятиугольника, то есть 144°.

Пример фантастической наблюдательности, или Звёзды умеют красиво уйти!

Была весна 1996 года. Убедительную конкуренцию Турниру Городов составляли Соросовские Олимпиады. Кроме того, были ещё достаточно популярны Математические бои. Одиннадцатиклассников обычно уже не привлекают ни на какие соревнования. У них в это время и без того масса забот по выпускным и вступительным экзаменам. Так что участие трёх учеников, в Весеннем Туре 17-го Турнира Городов было сугубо добровольным. Ребята выглядели уставшими после многочисленных олимпиад последнего учебного года. Они уже внесли свой весомый вклад в славную историю Математической школы. Во время перерыва им разрешили зайти в спортивный зал снять напряжения мыслительной деятельности. Один из учителей спросил их, как успехи? Ребята пообещали, что напоследок, специально для него, обязательно найдут красивое решение хотя бы одного задания. И с честью сдержали слово!

Задача №7. Рассмотрим произведение ста сомножителей: 1!;2!;3!;…100!. Можно ли выбросить один из этих сомножителей, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом? (Через n! обозначается произведение 1*2*3*… n; 1!=1). (17 Турнир Городов, 1996 г.).

Приведем без особых комментарий решение, которое предложили ученики 11 класса: Евгений, Эдуард и Юрий. Решение, которое восхищает автора уже 12 лет! Решение, которое хотя и является коллективным (что против правил всех олимпиад), но которое всё же стало красивым завершением школьных математических выступлений этих ребят! Решение, которым мог бы гордиться любой учитель, нашедший его самостоятельно. И ведь в нём, всего-то нужно было усмотреть одну простую закономерность!

$$\left\{\begin{matrix} 1! = 1 \\ 2! = 1 \end{matrix}\right\} \cdot 2$$

$$\left\{\begin{matrix} 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \end{matrix}\right\} \cdot 4$$

$$\left\{\begin{matrix} 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \end{matrix}\right\} \cdot 6$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$\left\{\begin{matrix} 97! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 97 \\ 98! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 97 \end{matrix}\right\} \cdot 98$$

$$\left\{\begin{matrix} 99! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \\ 100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \end{matrix}\right\} \cdot 100 .$$

Очевидно, что всё произведение можно представить в следующем виде:

$$2 \cdot (1!)^2 \cdot 4 \cdot (3!)^2 \cdot 6 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot (97!)^2 \cdot 100 \cdot (99!)^2 =$$

$$= 2^{50} \cdot 50! \cdot (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 99!)^2 .$$

И ясно, что если теперь выбросить 50!, то оставшееся произведение является полным квадратом.

Завершая первую главу, автор надеется, что, ознакомившись с ней, читатели поверят в свои силы, в то, что и они смогут решать нестандартные задачи также ярко и находчиво, как реальные учащиеся, о которых здесь рассказано. Чтобы этому научиться Вам в принципе достаточно искреннее желание и психологический настрой.

Глава 2. Радость творческого поиска.

В этой главе представлены решения некоторых заданий из опыта преподавателя математической школы и руководителя команд, учащихся на различных олимпиадах. Даются рекомендации по возможным поискам решений. Обсуждаются психологические, эмоциональные аспекты этих поисков.

§ 1. Пример удачной переформулировки задания.

Задание № 8. Диагональ BD делит пятиугольник ABCDE на ромб ABDE и равносторонний треугольник BCD. Найти угол ACE. (Зональный тур краевой олимпиады 1991 г. 9 кл).

Рисунок по условию задачи.

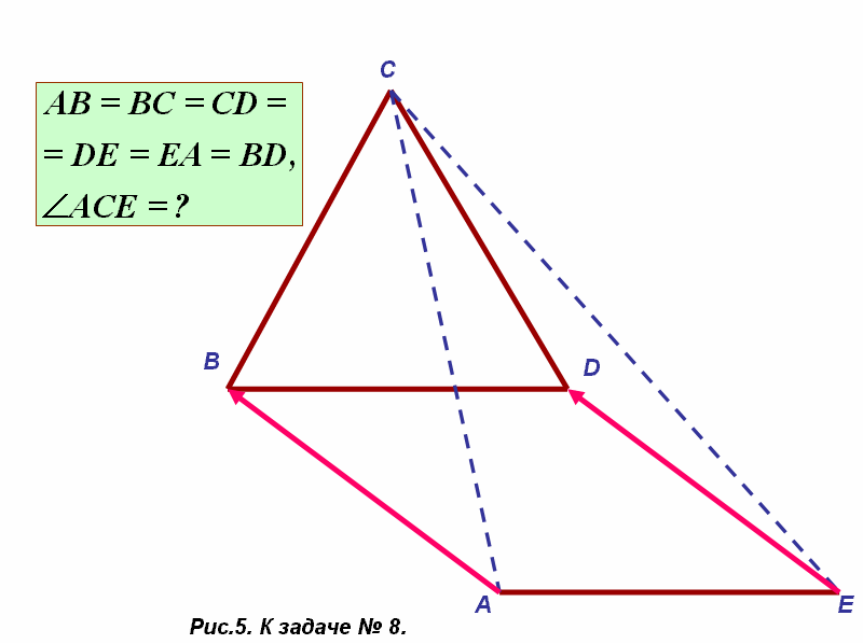


Рис.5. К задаче № 8.

Гл.2-8-5.ppt

Следует сразу обратить внимание на то, что пятиугольник ABCDE вовсе не обязан быть выпуклым, так как ромб ABDE может менять свою форму, в отличие от треугольника. По условию следует, что величина угла ACE не зависит от формы ромба. Поэтому числовой ответ можно получить, рассмотрев любой удобный частный случай. Например, если ромб станет квадратом, то достаточно просто выяснить, что угол ACE равен 30^0. Это, конечно, не есть полное безупречное решение, но оно имеет право на жизнь, как один из законных этапов поиска. К тому же на любой олимпиаде за такое решение обязательно начисляются какие-то баллы, пусть даже и минимальные. А с точки зрения тестированных заданий, данное решение и вовсе идеально, так как быстро даёт правильный ответ. Но правильный ответ и правильное решение далеко не всегда тождественны. Ещё быстрее ответ получится когда ромб выродиться в отрезок BE, тогда токи A и D совпадут. Найдутся скептики-педанты, которые тут же раскритикуют такой частный случай, сказав, что отрезок не является ромбом. Но тогда теряется вся красота динамичного решения с обобщением на все возможные ситуации. Тогда теряется существенная часть развивающей составляющей решения. Рассмотрение частных случаев с последующим обобщением, является решением в духе истинных участников олимпиад. Кроме того, точно известный ответ даёт мощный психологический стимул дальнейшего поиска.

Конечно самое главное – увидеть конструктивную идею. Она может возникнуть из перебора различных известных математических фактов. Но этот перебор должен быть осмысленным, целенаправленным. В данном случае возможен следующий ход рассуждений:

- Равные векторы совмещаются параллельным переносом;
- Равные векторы можно построить на противоположных сторонах ромба;
- Можно попробовать выразить стороны угла ACE через сумму некоторых векторов.

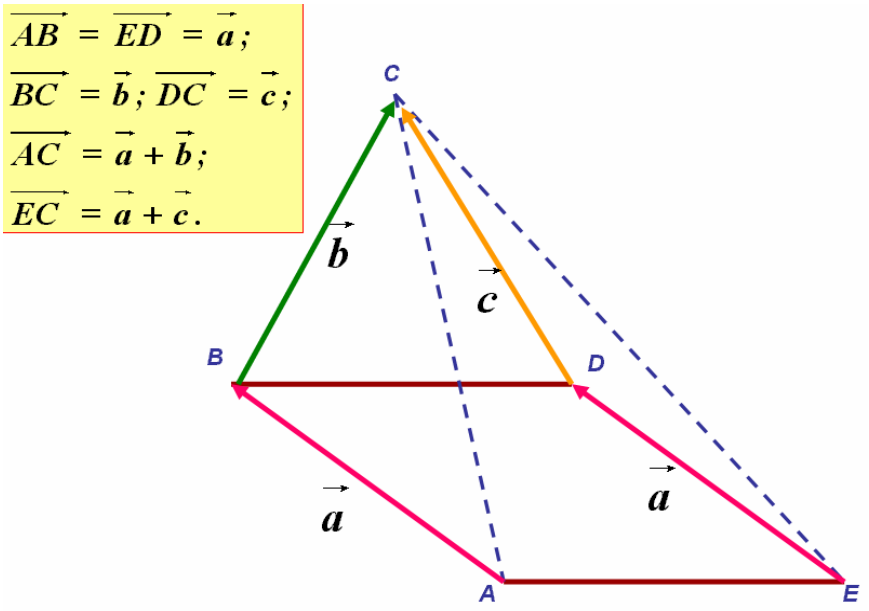


Рис. 6. К задаче № 8. Векторная конструкция. ***Гл.2-8-6.ppt***

Ключевая идея состоит в замене двух равных векторов одним, причем с началом в вершине C. В практике поисков решений есть приём, называемый: «То же самое, но иначе».

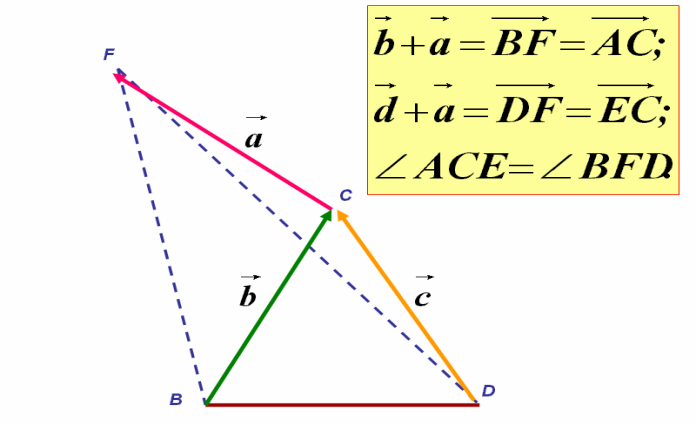


Рис. 7. К задаче № 8. Новый взгляд на проблему. ***Гл.2-8-7.ppt***

Остаётся заметить, что точки B, D и F лежат на окружности с центром C и радиусом, равным модулю каждого из рассматриваемых векторов, эти модули очевидно равны. Но тогда вписанный угол BFD равен половине соответствующего центрального угла BCD, который равен 60^0 как угол равностороннего треугольника. Ответ: 30^0.

Для лучшего понимания геометрической и динамической сущности данной задачи, можно ознакомиться с её интерактивной компьютерной версией. Можно сформулировать и решить более общее задание:

Задание № 9. Пять точек A, B, C, D, E расположены на плоскости так, что образуют равносторонний треугольник BCD и ромб ABDE. Чему может быть равен угол ACE?

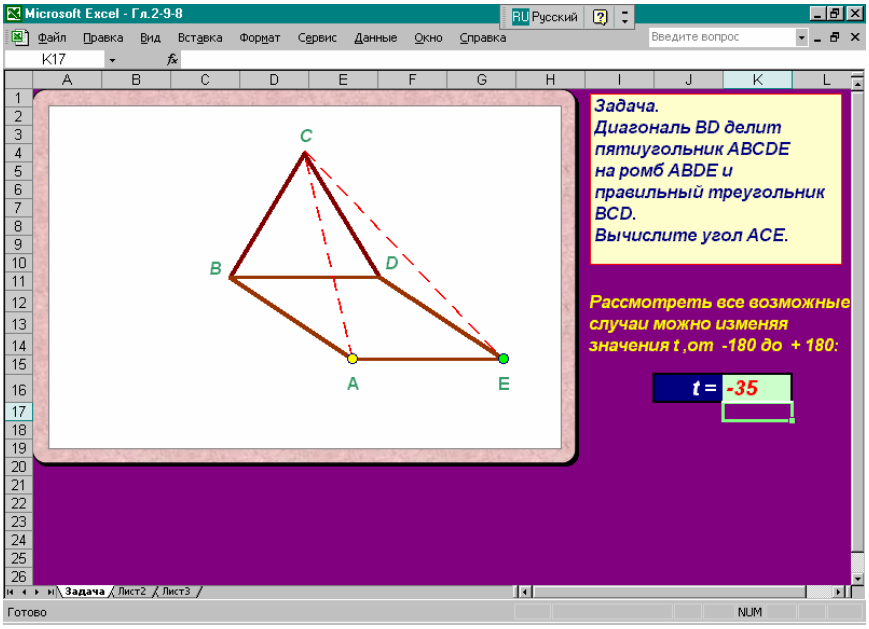


Рис. 8. Интерактивная версия задач №№ 8 и 9. Гл.2-9-8.xls

Основные поисковые идеи, встречающиеся в решённой и предлагаемых к решению задачах:

- Выполнение аккуратного, наглядного рисунка;
- Рассмотрение частных случаев, которые, возможно дадут правильный ответ и идею дальнейшего поиска решения;
- Осознанный перебор различных математических фактов, связанных с конкретной задачей;
- Удачная переформулировка задания, или принцип «То же самое, но иначе!».

§ 2. Тренировка геометрической интерпретации.

Теперь предлагается изучить задание на геометрическую интерпретацию аналитических алгебраических выражений. Представляется, что читателям полезно будет познакомиться со свойствами не самых известных функций. Шаг за шагом из исходного безликого уравнения вырисовывается достаточно забавный геометрический образ.

Это задание факультатива по программе ВЗМШ (Всесоюзная Заочная Математическая Школа), предложенное в конце изучения темы «Координатный метод».

Задание № 10. Постарайтесь, шутки ради, Вы, друзья, в своей тетради аккуратно разобрать, как сумели мы задать « точку, точку, запятую, минус – рожицу смешную»:

$$\left(\left[\left[x\right]\right]+\left|y\right|\right)\cdot\left(\left[\left[y-2\right]\right]+\left|x\right|\right)\cdot\left(\left|x^2-4\right|+\left|y-3\right|\right)\cdot\left(x^2+\left(y-1\right)^2-16\right)=0.$$

То есть требуется построить график данного уравнения и посмотреть, что из этого получится. Поначалу, конечно шокирует обилие модульных и прочих скобок. Начнём разбираться спокойно, с наиболее очевидного. Будим приравнивать к нулю каждую из круглых скобок в отдельности. Уравнение:

$$x^2+(y-1)^2-16=0,$$

$$(x-0)^2+(y-1)^2=4^2,$$

является, очевидно, уравнением окружности с центром ***M(0;1)*** и радиусом ***R=4.*** Уже ясно, что, скорее всего, именно оно и описывает овал «рожицы смешной». Приравняем к нулю следующую скобку:

$$\left|x^2-4\right|+\left|y-3\right|=0,\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4=0\\y-3=0\end{cases}.$$

Так как нулю равна сумма двух модулей, то нулю равен и каждый из этих модулей, а, следовательно, и каждое из выражений, стоящих под знаком модуля. Далее, имеем:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = 3 \end{cases}$$

В последней системе «зашифрованы» пара точек с координатами: (-2;3) и (2; 3). Почему? Замените фигурную скобку союзом «и», а квадратную скобку - союзом «или» и перепишите последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Эти две точки будут изображать глазки искомой рожицы. Не хватает ещё носика и ротика. Возможно, они зашифрованы в оставшихся круглых модульных скобках. Дальше будет чуть сложнее, но не смертельно.

$$\left|\left[\left|y-2\right|\right]\right| + \left|x\right| = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left|y-2\right|\right] = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Сейчас – самое время пояснить смысл квадратных скобок. Они в данном случае обозначают целую часть числа: целая часть числа – есть наибольшее целое число, не превосходящее этого числа. Примеры:

$$[5,2] = 5;$$
$$[0.6] = 0;$$
$$[-7.8] = -8.$$

По-русски: если целая часть некоторого числа равна нулю, то число заключено в пределах от нуля, до единицы. Это и используем в дальнейших преобразованиях:

$$\begin{cases} \left[\left|y-2\right|\right] = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \left|y-2\right| < 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1 < y - 2 < 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < y < 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Последняя система описывает открытый отрезок на оси y от точки (0;1) до точки (0;3). Это и есть что-то типа носика. Остаётся расшифровать «ротик»:

$$\left|\left[\left|x\right|\right]+\left|y\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\left|x\right|\right]=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}0\le\left|x\right|<1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ y=0\end{cases}$$

Последняя система описывает открытый отрезок на оси ***x*** от точки (-1;0) до точки (1;0) , ну чем не «ротик». В результате получаем график:

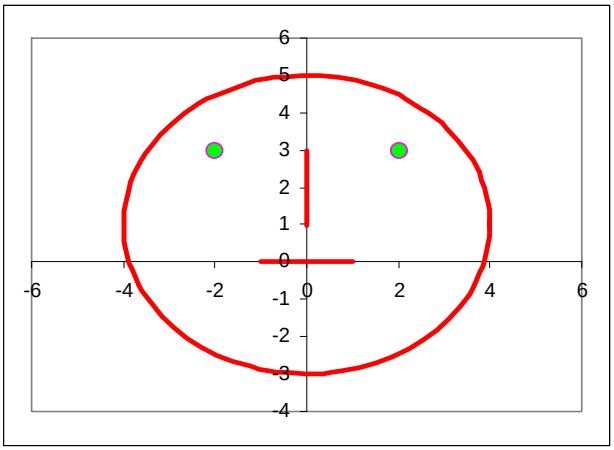


Рис. 9. К заданию № 10. Гл.2-10-9.xls

Поисковые идеи, встречающиеся в решённой задаче:

- Разбиение большого задания на отдельные подзадачи;
- Интерпретация аналитических выражений геометрическими образами;
- Аккуратное, внимательное выполнение тождественных преобразований.

§ 3. Осознанный, целенаправленный перебор вариантов.

Всегда интересно делиться с коллегами собственными красивыми решениями. Но готовый, голый результат мало кого устраивает полностью. Гораздо интереснее знать – как он был получен.

Рассмотрим решение одной из олимпиадных заданий ВЗМШ МГУ 2006 г.

Задание №11. Составить такие четыре тройки целых неотрицательных чисел, что любое число от 1 до 81 можно представить в виде суммы четырёх чисел, взятых по одной из каждой тройки.

Приступать к решению совершенно непонятной задачи можно с построения хотя бы нескольких простых частных примеров. Тогда задание становиться на много яснее. Позже осознаешь, что любой поиск, так, или иначе, пробивает шахту в подкорку сознания. И в награду за желание решить и за затраченные усилия Бог посылает тебе яркую, простую ключевую идею. А дальше – дело техники. Дальше ты уже можешь спокойно развивать эту идею, наслаждаясь не блужданием в потёмках, а вполне осознанным, логичным, творческим поиском. Пора рассказать и о ключевой идее. Рассмотрим прямоугольную таблицу 4*3 (4 строки, 3 столбца). Выбор числа из каждой тройки будим обозначать цифрой 1 в соответствующей строке. Например:

1		
	1	
		1
	1	

Это означает, что из первой тройки выбрано первое число, из второй – второе, из третьей – третье, из четвёртой – второе. То есть в любой момент в каждой строке единицей занята лишь одна клетка. Зададим себе простой, детский вопрос: Сколько существует комбинаций таких наборов единиц? Каждую единицу, в каждой строке можно, независимо от других строк, выбрать тремя способами. Следовательно, число всех возможных комбинаций равно: $3*3*3*3 = 3^4 = 81$. Но ведь 81 – это и есть наибольшее число, которое нужно представить в виде суммы в данной задаче! Представление чисел в таблице и ответ на вопрос – это, в данном случае и есть основная, ключевая идея исследовательского поиска. Теперь самое главное – найти способ последовательного перечисления каждой из 81 комбинаций. И когда такой способ нашёлся, то составление таблицы прошло просто, логично и убедительно. Как перечислить все комбинаций, можно понять из приведённой ниже таблицы. Сначала передвигаем последовательно единицу в нижней строке. Как только она доходит до края, то на следующем шаге она возвращается в начало строки, а единица следующей, верхней строки перемещается на одну клетку вправо. После этого снова передвигается нижняя единица, пока не дойдет до края. И так далее, до перечисления всех комбинаций из 81. Числу 81 будет соответствовать заполненный единицами последний, третий столбик.

1				2				3				4				5				6				7		
1				1				1				1				1				1				1		
1				1				1				1				1				1				1		
1				1				1					1				1				1					1
1					1					1		1					1					1		1		

Начнём последовательное заполнение таблицы троек чисел. Число 1, естественно равно 1 + 0 + 0 + 0. Далее: 2 = 1 + 0 + 0 + 1; 3 = 1 + 0 + 0 + 2; 4 = 1 + 0 + 3 + 0. Тогда, первые несколько клеток таблицы заполняются следующим образом.

Таблица решения задачи		
1		
0		
0	3	
0	1	2

Эта таблица позволяет однозначно представить в виде суммы числа от 1 до 6. Причём 6 = 1 + 0 + 3 + 2. Тогда клетку третьей строки и третьего столбца или, коротко, клетку (3;3), надо заполнить так, чтобы получить представление числа 7. Мы этого добьёмся, поставив в клетку (3;3) число 6. Тогда 7 = 1 + 0 + 6 + 0; 8 = 1 + 0 + 6 + 1; 9 = 1 + 0 + 6 + 2. Теперь, чтобы получить представление в виде суммы числа 10, надо клетку (2;2) заполнить числом 9, тогда: 10 = 1 + 9 + 0 + 0. Следующее заполнение таблицы позволяет сделать однозначное представление в виде суммы любого натурального числа от 1 до 18.

Таблица решения

задачи		
1		
0	9	
0	3	6
0	1	2

18 = 1 + 9 + 6 + 2. Пора заполнить клетку (2;3). Следующее число 19, поэтому в клетку (2;3) ставим 18, тогда 19 = 1 + 18 + 0 + 0.

Таблица решения задачи		
1		
0	9	18
0	3	6
0	1	2

Наибольшее число, которое можно представить в виде суммы с помощью заполненной на данный момент таблицы, равно: 1 + 18 + 6 + 2 = 27. Поэтому клетку (1;2) заполняем числом 28, тогда 28 = 28 + 0 + 0 + 0. В результате мы сможем однозначно представить в виде требуемой суммы уже любое натуральное число от 1 до 28 + 18 + 6 + 2 = 54. Поэтому в клетку (1;3) ставим число 55 и задача полностью решена! Окончательная таблица имеет следующий вид:

Таблица решения задачи		
1	28	55
0	9	18
0	3	6
0	1	2

Но это ещё далеко не всё! Теперь, поумневшим усвоенными идеями читателям, надеюсь, не составит труда решить следующую задачу:

Задание №12. Составьте такие четыре четвёрки целых неотрицательных чисел, что любое число от 1 до 256 можно представить в виде суммы четырёх чисел, взятых по одной из каждой четвёрки.

Кроме того, решение данного задания даёт отличный повод для знакомства с функцией «Сумма Произведений» из процессора EXCEL, играющая важную роль в решении задач оптимизации.

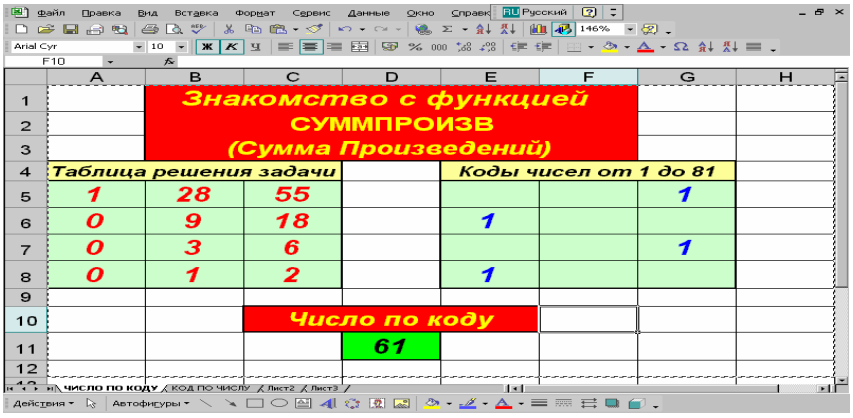


Рис. 10. Интерактивная версия решения задачи. Фрагмент «Число по коду». [Гл.2-12-10.xls]

На рис. 10. показан фрагмент интерактивной версии решения данной задачи. Помещая в массив (E5:G8) коды чисел, в клетке D11 получаем значение числа от 1 до 81. Это число получается как сумма произведений соответствующих значений в массивах (A5:C8) и (E5:G8). На другом листе решается обратная задача – восстановление кода по данному числу. Для этого приходится воспользоваться операцией «Поиск решения» и, к сожалению, программа для некоторых чисел даёт отказ в поиске. Но это уже чисто технические детали.

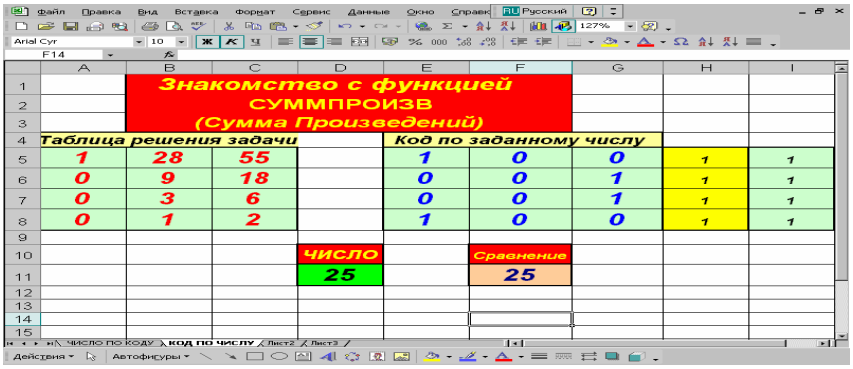


Рис. 11. Интерактивная версия задачи. Фрагмент «Код по числу». [Гл.2-12-10.xls]

Эвристические идеи решённой задачи:

- Перебор частных вариантов – полноправный этап поиска решения;
- Чёткая формулировка конструктивной идеи;
- Планомерное развитие конструктивной идеи;
- Удачное применение табличных построений;
- Обобщение, выявление связей решаемой задачи с известными теоретическими фактами и современным компьютерным инструментарием.

§ 4. Что может быть интересного в арифметической прогрессии?!

В принципе, к данному заголовку вполне можно добавить вопрос о том, а что же собственно следует считать нестандартной задачей? Только ли те задачи, которые предлагают на олимпиадах? Возможно, следующая задача из материалов подготовительных курсов в Таганрогский радиотехнический университет (примерно 1995 г.), вполне подходит под ранг нестандартной олимпиадной.

Задание № 13. Известно, что в арифметической прогрессии $S_m = S_n$, $m \neq n$, найти S_{m+n}.

Самый первый, самый детский вопрос: «А разве такое бывает?!». Особого выбора формул нет, поэтому поиск можно начать так:

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m = S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$\Rightarrow a_1 m + m a_m = a_1 n + n a_n.$$

Составим один из возможных частных примеров:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	2	1	0	-1	-2	-3	- 4	-5	-6
S_n	3	5	6	6	5	3	0	- 4	-9	-15

$$S_1 = S_6 = 3 \quad и \quad S_{1+6} = S_7 = 0;$$
$$S_2 = S_5 = 5 \quad и \quad S_{2+5} = S_7 = 0;$$
$$S_3 = S_4 = 6 \quad и \quad S_{3+4} = S_7 = 0. \quad ...!$$

Из построенного примера ясно, что прогрессии, о которых идёт речь в задаче – существуют. Ясно даже, каков может быть ответ. Но нужно найти общее решение.

В процессе поиска бывают такие критические моменты, когда кажется, что сумма потраченного времени уже не компенсируется никакой радостью от нахождения верного решения. И очень часто нужная идея приходит в голову именно в эти мгновения!

Построим пример прогрессии с заранее заданным равенством конкретных сумм. Пусть $S_3 = S_5$. Тогда:

$$S_3 = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} \cdot 3 \quad ; \quad S_5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5;$$

$$6a_1 + 6d = 10a_1 + 20d \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -\frac{7d}{2};$$

$$d = 2; a_1 = -7.$$

Построение именно этого частного примера принесло озаряющую идею, которая на полях дневника изобразилась красной молнией!

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
S_n	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0

Дальнейшие записи пошли как по маслу:

$$S_m = \frac{1}{2}\left(2a_1 + d(m-1)\right)m = S_n = \frac{1}{2}\left(2a_1 + d(n-1)\right)n;$$

$$2a_1m+d(m-1)m=2a_1n+d(n-1);$$
$$2a_1(m-n)=d(n^2-n-m^2+m);$$
$$2a_1(m-n)=d(m-n)(n+m)+(m-n);$$
$$a_1=\frac{1}{2}(1-n-m)d;a_{m+n}=a_1+d(m+n-1)=$$
$$=\frac{1}{2}(m+n-1)d;$$
$$S_{m+n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-n-m}{2}d+\frac{m+n-1}{2}d\right)(m+n)=0.\quad ok!!!$$

Эвристические приёмы, использованные в поиске решения данного задания:

- Построение необходимых для получения нужной идеи частных примеров;
- Изучение закономерностей, выдвижение предположений;
- Проверка выдвинутых гипотез на правдоподобность;
- Синтез всех разрозненных результатов поиска в окончательную версию решения.

§ 5. От простого к сложному, от частного к общему.

Рассмотрим одно из заданий матбоя 2007 года для 7-8 класса.

Задание № 14. Квадратная таблица 10*10 заполнена числами. Подсчитаны 20 сумм по строкам и столбцам. Может ли оказаться, что среди этих сумм встретятся все целые числа от 1 до 20?

В методическом пособии «Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач» (Киев, «Александрия» 1993 г.) авторы А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, пишут:
“Что же такое красивая задача? Ответ на этот вопрос, естественно, дело вкуса. Вместе с тем, опыт показывает, что учащимся нравятся те задачи, решение которых доступно, по возможности короткое, а самое главное – неожиданное”. Таким образом, красота задачи определяется красотой её решения. А начнём с подробного разбора не такой уж большой системы линейных уравнений. Сузим поиск до таблицы 2*2.

x_1	x_2	a
x_3	x_4	b
c	d	$\sum$

То есть, исследуем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_3+x_4=b \\ x_1+x_3=c \\ x_2+x_4=d \end{cases} \qquad (1)$$

Допустим, что система (1) имеет решение. Пусть $x_4=t$,
Тогда:

$$x_2 = d - t,$$
$$x_1 = a - x_2 = a - d + t,$$
$$x_3 = b - x_4 = b - t,$$
$$x_1 + x_3 = c, \Leftrightarrow a - d + t + b - t = c,$$
$$\Leftrightarrow a + b = c + d.$$

Получили условие, при котором система (1) имеет бесконечное множество решений, так как вместо t можно взять любое действительное число. Условие же $a + b = c + d$ естественным образом следует из таблицы 2*2, и левая и правая части равенства равны сумме всех элементов таблицы. В этом случае система (1) является не противоречивой. Если же это условие не соблюдается, то, очевидно система просто не может иметь решений.

Перебросим мостик в высшую школу. Покажем, как исследуется система (1) с использованием Метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d+c-a \end{array}\right).$$

Второе и четвёртое уравнение не противоречивы, если $b = d + c - a$, $a + b = c + d$, тогда одно из этих двух уравнений вычеркивается и остаётся система трёх уравнений с четырьмя неизвестными, которая, естественно имеет бесчисленное множество решений. Таким образом, полученный ранее результат подтверждён с помощью “тяжёлой артиллерии”. По этому поводу вспоминается анекдот из студенческого фольклора, что существует более ста доказательств теоремы Пифагора, о чём это говорит? Ответ: О том, что она – верна!

Теперь – самое интересное! Как ненавязчиво перейти от таблицы 2*2 к таблице 10*10? Известен факт из высшей алгебры о том, что в непротиворечивой системе из 20 уравнений и 100 неизвестных, 20 – зависимые, а 80 – свободные, которым можно придавать произвольные значения, в частности – нули. И такая система имеет бесчисленное множество решений. Поэтому возникла идея: в каждой строке и в каждом столбце таблицы 10*10 оставить лишь по два неизвестных. Так и набирается 20 зависимых неизвестных, а независимые заменим нулями и просто не внесём в таблицу. Впрочем, к такой идее можно прийти и без высшей математики, а исходя из элементарной логики обобщения ранее полученного результата. Нам просто нужно, если это возможно, разбить целые числа от 1 до 20 на такие четвёрки, в которых сумма двух чисел равна сумме двух других. Причём достаточно одного примера такого разбиения. Наиболее очевидным мне показался следующий способ: 1 + 20 = 2 + 19; 3 + 18 = 4 + 17; 5 + 16 = 6 + 15; 7 + 14 = 8 + 13; 9 + 12 = 10 + 11. Все целые числа от 1 до 20 – в наличии и есть полная уверенность, что ничего не потеряно, это прямо следует из логики построения примера. Тогда таблица для решения задачи имеет вид:

x_1	x_2									1
x_3	x_4									20
		X_5	x_6							3
		X_7	x_8							18
				x_9	x_{10}					5
				x_{11}	x_{12}					16
						x_{13}	x_{14}			7

						x_{15}	x_{16}			14
								x_{17}	x_{18}	9
								x_{19}	x_{20}	12
2	19	4	17	6	15	8	13	10	11	∑

То есть, задача свелась к пятикратному применению ранее рассмотренного метода. Причем, в каждой из пяти систем одно неизвестное можно выбрать произвольно, пусть оно будет ноль. Тогда три других находятся очень просто.

1	0									1
1	19									20
		3	0							3
		1	17							18
				5	0					5
				1	15					16
						7	0			7
						1	13			14
								9	0	9
								1	11	12
2	19	4	17	6	15	8	13	10	11	∑

Эвристические идеи решённой задачи:

- Иногда полезно найти решения уменьшенного аналога решаемой задачи, или решить как бы небольшую часть большой задачи, или подробно разобрать частный случай;
- Если в задаче требуется привести один частный пример, то лучше попытаться составить его наиболее простым и понятным способом;
- В решении многих больших задач порой заложены те же идеи, что и в сравнительно небольшой задаче.

§ 6. Парабола, линейка, циркуль, и теорема Виета.

Особенность следующей задачи в том, что её условие связывает воедино некоторые элементы алгебры и геометрии. Таким образом, создаётся структура нестандартного задания, которое лет десять – четырнадцать назад привлекала внимание неожиданной новизной. Конечно сейчас, даже на обычных уроках математики, трудно кого-то удивить применением геометрических методов к решению алгебраических задач. Тем не менее, эта задача, на мой взгляд, заслуживает внимания для подготовки и олимпийцев и абитуриентов.

Задание № 15. Построен график функции $y = x^2$. Оси координат стёрли. Как восстановить оси координат с помощью циркуля и линейки? (18-й Турнир Городов 1996г., Осенний тур, тренировочный вариант, 10-11 кл.)

В поиске решения данной задачи как-то сразу возникла идея о построении параллельных хорд. Затем хотелось каким-то образом найти вершину параболы и провести через неё касательную. Но как это сделать только с помощью циркуля и линейки? Ключевой идеей оказалось построение трёх параллельных хорд и деление каждой из них пополам.

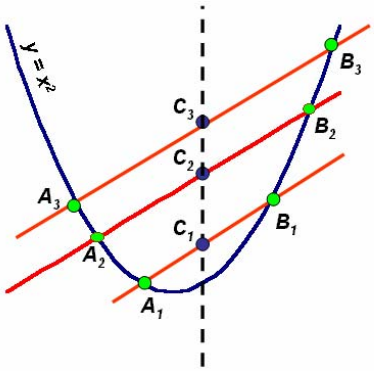


Рис. 12. Середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой. ***Гл.2-15-12.ppt***

Оказалось, что все три середины хорд лежат на одной прямой, причём параллельной оси y. Но всё это требует строгого доказательства. И тут главное вовремя вспомнить о теореме Виета! Выразим абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = kx + b$.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = kx + b,$$

$$\Leftrightarrow x^2 - kx - b = 0,$$

$$x_1 + x_2 = k, \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2}.$$

Так как все параллельные хорды имеют один и тот же угловой коэффициент, то из последнего равенства следует, что середины всех этих хорд имеют одну и ту же абсциссу, то есть лежат на прямой, параллельной оси ординат, которая в данном случае совпадает с осью параболы. Теперь порядок построения достаточно очевиден:

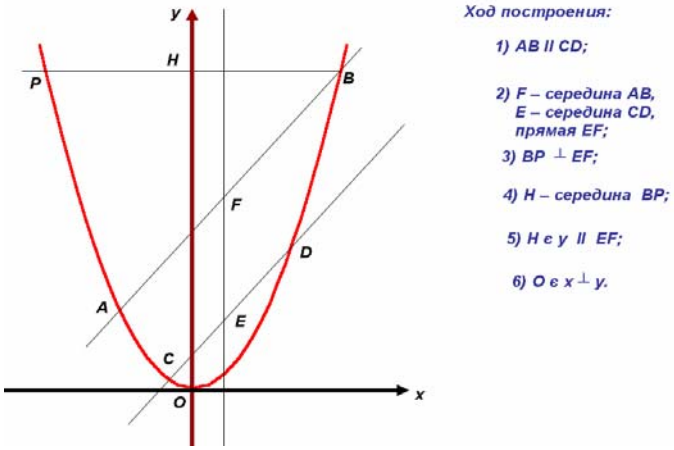


Рис 13. К заданию № 15. Восстановление осей координат. ***Гл.2-15-13.ppt***

Последовательность построения наглядно продемонстрирована на мультимедийном слайде ***Гл.2-15-13.ppt*** (Пошаговое построение можно наблюдать, нажимая клавишу Page Down).

Эвристические идеи решённой задачи:

- Сопоставление геометрических фигур и их аналитических описаний;
- Достаточно точные геометрические построения, в результате которых возникает конструктивная гипотеза;
- Строгое аналитическое доказательства полученной гипотезы;
- Перенос знаний из алгебры в геометрию и наоборот;
- Анализ и синтез в задачах на построение.

§ 7. Пример применения метода координат.

В следующей задаче одной из идей поиска решения может служить достаточно универсальный метод координат. Также, как и в предыдущей задаче, имеют место сочетание аналитической и конструктивно – графической структуры.

Задание № 16. Дана прямая и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от нее. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку C, что произведение AC*BC будет наименьшим?

В качестве данной прямой естественно можно выбрать ось абсцисс. Тогда ось ординат строится как серединный перпендикуляр к отрезку AB. Это построение легко выполнимо с помощью циркуля и линейки. В полученной таким образом системе, выразим координаты точек A, B и C. Ясно, что точки A и B будут иметь абсциссы отличающиеся только знаком и равные ординаты. Поэтому пусть A(-m; n), B(m; n). Так как точка C(x; 0) принадлежит оси абсцисс, то её ордината равна нулю.

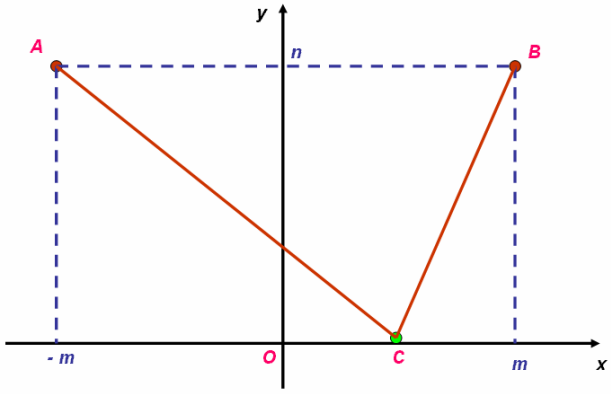


Рис. 14. Координатный метод решения задачи.

Гл.2-16-14.ppt

Далее:

$$AC^2 = (x+m)^2 + n^2; \quad BC^2 = (x-m)^2 + n^2.$$

$$f(x)=\left((x+m)^2+n^2\right)\left((x-m)^2+n^2\right)=$$
$$=\left(x^2-m^2\right)^2+2n^2\left(x^2+m^2\right),$$
$$f'(x)=4x\left(x^2-m^2+n^2\right),$$
$$f'(x)=0,\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2-n^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\ge m\\x=0\end{cases}\\\begin{cases}n<m\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m^2-n^2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

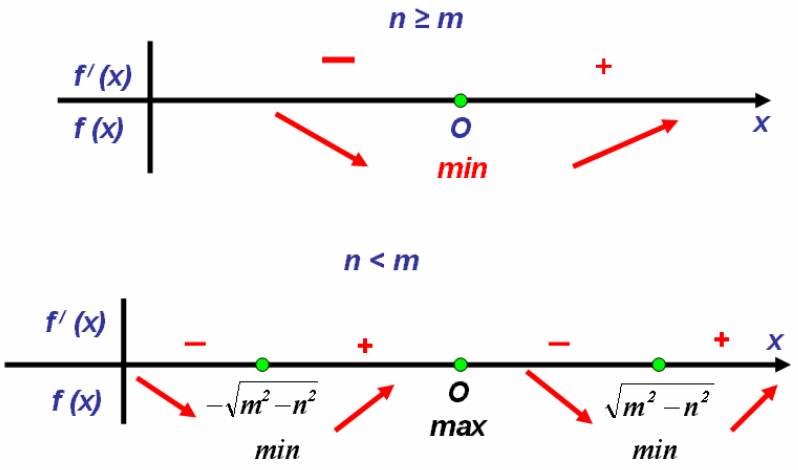


Рис. 15. Исследование на монотонность и экстремумы.

[Гл.2-16-15.ppt]

То есть, получается, что при $n \ge m$, $x = 0$, тогда точка C совпадает с точкой O. Более интересный случай, когда $n < m$. Тогда, из соображения симметрии, получаем два решения, то есть две точки пересечения окружности с центром в точке $F(0;n)$ и радиусом $R = m$ с осью абсцисс.

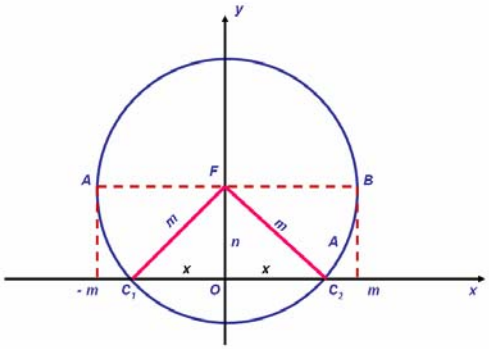


Рис. 16. Построение точек C_1 и C_2.

[Гл.2-16-16.ppt]

А теперь, рассмотрим решение центрального жюри оргкомитета Турнира Городов. От души признаю, что оно гораздо лучше приведённого выше, в чём читатели сейчас и убедятся. В сравнении разных подходов и идей – несомненная польза.

Решение жюри оргкомитета. Площадь треугольника ACB не зависит от C: основание AB и опущенная на него высота постоянны. С другой стороны, эта площадь равна 0,5*AC*BC*sin(<ACB). Поэтому наименьшему произведению AC*BC соответствует наибольший синус угла ACB. Построим окружность с диаметром AB. Если она пересекает нашу прямую ***l*** в двух точках P и Q, то эти точки – искомые (синусы углов APB и AQB равны по единице). В

противном случае искомая точка С – пересечение ***l*** с серединным перпендикуляром к отрезку АВ (из этой точки отрезок АВ виден под наибольшим нетупым углом, поскольку остальные точки прямой лежат вне проходящей через точки А, В и С окружности).

Эвристические идеи, использованные в решенной задаче:

- Перевод условия задачи на язык аналитической геометрии;
- Конструирование и исследование функции;
- Геометрическая интерпретация результатов аналитического исследования;
- Сравнение с чисто геометрическим решением.

§ 8. Из заданий о расстановках на шахматной доске.

В подобных задачах ключ к поиску может дать естественная симметрия шахматной доски.

Задание № 17. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любой горизонтали и на любой вертикали чёрных фишек было ровно в два раза больше чем белых? (Каждая фишка занимает отдельную клетку). (29-й Турнир Городов, 2007 г., Осенний тур, 8-9 кл.)

Для начала всегда хочется построить хотя бы один пример, отвечающий условию задания. Тогда появляется психологическая уверенность в том, что и вся задача может быть успешно решена. Пусть белых фишек в каждой горизонтали и вертикали по одной. Для простоты поиска лучше расставим их вдоль одной из главных диагоналей. Тогда чёрных должно быть по две в каждом прямом ряду и желательно, чтобы они также друг другу не мешали. Вот примерно из таких соображений и получается частный пример одной из расстановок.

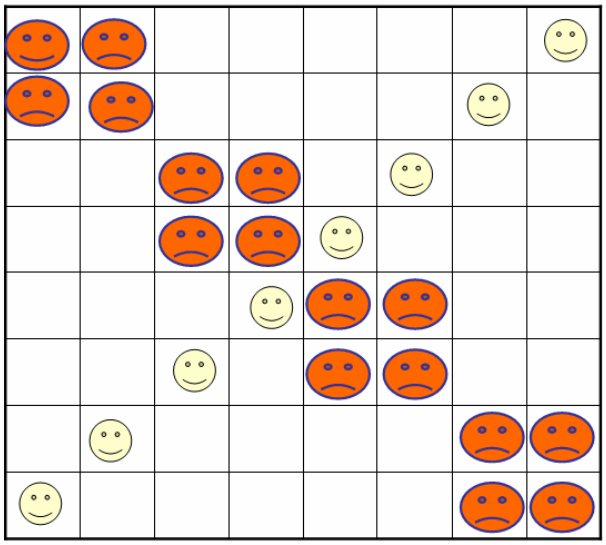


Рис. 17. Первая пробная расстановка.

Гл. 2-22-17.ppt

Симметричность расположения как бы сама контролирует правильность расстановки. Итак, условие задания вполне реализуемо. Теперь пора перейти и к основному вопросу. Какое же наибольшее число фишек любого цвета, может быть выстроено на шахматной доске, чтобы выполнялось условие задания. Начнём с белых фишек. Пусть их число на одной из горизонталей рано x, тогда число чёрных фишек на этой же горизонтали равно $2x$. Так как число клеток в горизонтали равно 8, то имеем неравенство: $x + 2x \le 8$, $3x \le 8$, $x \le 2$, так как x – целое число. Этот же результат получается, если попробовать взять три белых фишки. Тогда чёрных 6, а в сумме 9,

чего не может быть. Итак, в каждой горизонтали – не более двух белых фишек, следовательно – не более четырёх черных фишек. Итого, максимум клеток занятых фишками равен: 6* 8 = 48. Это – ответ к заданию. Но чтобы его узаконить, необходимо привести хотя бы один пример реализации максимальной расстановки. Зная максимальное число чёрных и белых фишек на горизонтали и вертикали, а также зная первый частный пример, не трудно сообразить, что одна из максимальных реализаций имеет следующий вид:

Рис. 18. Пример максимальной расстановки.

Гл.2-22-18.ppt

Основные поисковые идеи, встретившиеся в решённой задаче:

- Построение простого частного примера;
- Доказательные вычисления для возможного максимального количества;
- Идея симметричных построений;
- Построение примера максимальной реализации, по аналогии с частным примером.

§ 9. Всегда приятно успеть найти своё решение!

По окончании любого турнира, помимо возможного осадка на душе от не решённых вовремя задач, наступает самый главный этап подготовки к будущим выступлениям, а именно – разбор и шлифовка решений. На этом этапе эти действия проходят в спокойной комфортной обстановке. Изучение решений задач Турнира Городов лучше начинать с решённых задач или с тех, над которыми уже была проделана достаточно солидная интеллектуальная работа.
В решении предлагаемой задачи использована простая идея нахождения геометрического места точек. В добрых старых учебниках по геометрии, рассматриваемые ниже факты, назывались не иначе как «Одно замечательное свойство окружности».

Задание № 18. Середина одной из сторон треугольника и основания высот, опущенных на другие стороны, образуют равносторонний треугольник. Верно ли, что исходный треугольник тоже равносторонний? (29 Турнир Городов, осенний тур 2007 г.).

Рассмотрим возможность построения треугольника, отвечающего условию задачи. Пусть O – середина стороны AB. Построим равносторонний треугольник MON и точку C – пересечения прямых AM и BN.

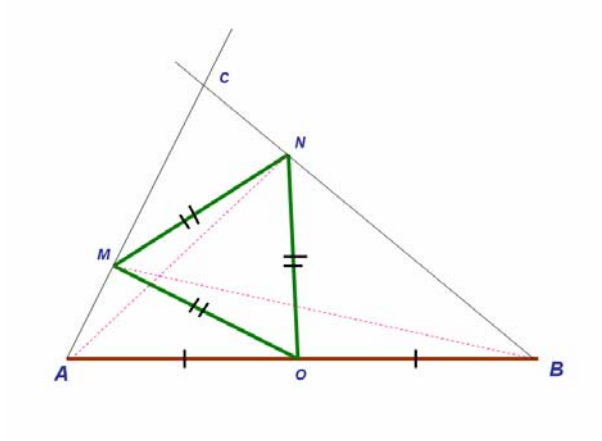


Рис. 19. Первое пробное построение.

По условию углы AMB и ANB равны по 90°. Но тогда вершины прямых углов M и N лежат на окружности с диаметром AB и OM = ON = OA = OB. В этом и заключается замечательное свойство окружности.

Теперь мы можем нарисовать новый чертёж, с учётом полученных сведений.

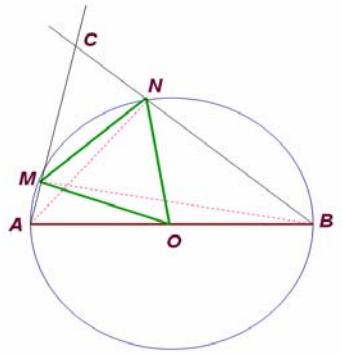


Рис. 20. Построение неравностороннего треугольника ABC, полностью отвечающего условию задачи.

Если на рисунке 2 угол AOM равен 20°, то треугольник ABC не является равносторонним, и, тем не менее, полностью удовлетворяет условию задачи. Ответ: не верно.

Но если оставить решение лишь на этой стадии, то задача потеряет процентов 80 своего истинного развивающего потенциала.

Разве не интересно узнать, что при вращении треугольника MON вокруг точки O, в верхней полуплоскости относительно прямой AB, угол ACB будет иметь одно и то же значение? А именно: $0{,}5(180^O - 60^O) = 60^O$. А ведь есть ещё и нижняя полуплоскость! Что будет происходить в ней, если заставить треугольник OMN вращаться вокруг O на любой угол?

По какой линии движется точка C при вращении того же треугольника? Оказывается – по окружности с хордой AB, видной из точек верхней дуги под углом 60°, а из точек нижней дуги, под углом 120°. Эту окружность можно построить следующим образом.

1) Правильный треугольник ABC_1;
2) Z – центр вписанной о описанной окружности треугольника ABC_1;

Описанная окружность и есть геометрическое место точек C.

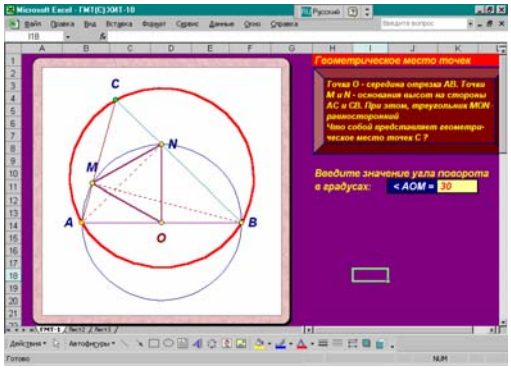


Рис. 21. Интерактивная компьютерная версия решения задачи.
Гл.2-24-21.xls

Эвристические идеи решённой задачи.

- Первый рисунок для решения геометрической задачи может быть приближённым и затем уточняется по мере выявления новых фактов;
- Полезно помнить основные геометрические места точек;
- Важно уметь проследить динамику изменения чертежа в зависимости от изменения одного из его элементов.

§10.. Психологические аспекты изучения чужих решений.

Успеть найти своё решение до ознакомления с чужим – конечно здорово. Но это удаётся далеко не всегда. Как поступать, если задача на Ваш взгляд – вполне решаема, но на неё затрачено больше времени, чем ожидалось в начале и без ощутимого результата? А под рукой есть чьё-то решение. Но Вам не позволяет гордость его прочитать. Но вы убеждены, что обязательно найдёте своё решение. Возможны следующие варианты действий:

- Не решается, и Бог с ней! Займусь чем-нибудь более интересным!
- Нет! Я ни за что не буду смотреть чужое решение! Я сам очень умный и обязательно найду своё!
- А почему бы и не посмотреть? Вдруг узнаю что-то новое и интересное!
- Я достаточно долго решал эту задачу. У меня есть некоторые свои результаты, но возможно не хватает одной главной идеи. Поэтому я имею полное моральное право изучить чужое решение.
- Не решается, значит, мне не дано их решать. Пусть решают те, у кого это получается лучше.

Конечно, могут быть и другие рассуждения. Важно вовремя отдать себе отчёт в том, какую цель Вы преследуете в данный момент. И, на всякий случай – помнить, что математику как науку создавали в течение нескольких тысячелетий лучшие умы человечества. И каждый смог внести в неё что-то своё, существенное лишь благодаря знакомству с результатами деятельности предшественников. Такова диалектика любого научного познания. Если поставить цель изучать чужие решения для того, чтобы создавать свои, то проблем никаких не может быть просто по определению. И естественно большое значение имеет то, как именно представлено чужое решение.

Возможно, самый идеальный вариант подачи решений принят центральным жюри Турнира Городов. За редким исключением они дают достаточно краткие решения, оставляющие читателю простор для собственных размышлений и обобщений. Рассмотрим конкретный пример.

Задание № 19. В таблицу 29*29 вписаны числа 1, 2, 3, …, 29, каждое по 29 раз. Оказалось, что сумма чисел над главной диагональю в три раза больше суммы чисел под этой диагональю.

Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы. (29 Турнир Городов, Осенний тур 2007 г., тренировочный вариант 8-9 кл.).

Представим, что Вы в ходе поиска рассмотрели два частных примера для таблиц меньшей размерности. Для таблицы 3*3, получено следующее простое решение.

2	3	3
1	2	3
1	1	2

По аналогии можно составить таблицу 5*5.

3	4	4	4	4
1	3	4	5	5
1	1	3	5	5
1	1	2	3	5
2	2	2	2	3

В построенных таблицах явно наблюдается некоторая закономерность. Представим вполне реальную ситуацию, когда Вам элементарно не хватило времени довести свои рассуждения до полного завершения. Но проделанная интеллектуальная работа уже позволяет представить все возможные нюансы решения задачи. Вы вполне готовы понять и принять решение центрального жюри. Так почему бы этого не сделать? Приведём его дословно. Над (под) диагональю находится 29·14=406 чисел. Но сумма 406 наибольших чисел таблицы (16, …, 29, взятые по 29 раз) равна 29·(16+29)·14/2=29·45·14/2 ровно в три раза больше суммы 406 наименьших чисел (1, 2, …, 14, взятые по 29 раз), которая равна 29·(1+14)·14/2=29·15·14/2. Поэтому все числа на диагонали равны 15.

Что мы видим? Приведённое решение замечательно согласуется с Вашими рассуждениями (иначе и быть не могло!). В то же время оно как бы приглашает Вас сделать последний штрих в виде обобщающих рассуждений. Для таблицы размерности ***n*n*** количество чисел, находящихся над (под) главной диагональю равно ***0.5(n-1)n.*** Если ***n*** – нечётное число, то существует среднее из этих чисел, равное ***t = 0.5(n+1)***. Выразим теперь суммы ***0.5(n-1)n*** самых маленьких и затем – самых больших чисел и найдём их отношение.

$$\sigma_1 = n(1+2+3+...+t-1) = n\frac{1+t-1}{2}(t-1) = 0.5nt(t-1);$$

$$\sigma_2 = n(t+1+t+2+t+3+...+n) = n\frac{t+1+n}{2}(t-1) = 0.5n(t+n+1)(t-1);$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{t+n+1}{t} = \frac{0.5(n+1)+n+1}{0.5(n+1)} = \frac{1.5n+1.5}{0.5n+0.5} = 3.$$

Итак, если выше главной диагонали поместить все самые большие числа, а ниже – все самые маленькие числа, то только в этом случае нужное отношение будет равно трём. При любой другой расстановке оно только уменьшится. Тогда с необходимостью по главной диагонали должны стоять средние числа. Теперь задача решена полностью.

Эвристические идеи рассмотренного решения:

- Начало поиска с частных решений более простой задачи;
- Выявление закономерностей, которые могут быть обобщены;
- Построение общего решения на основе полученных частных решений.

Другие задания из копилки автора предлагаются в списке для самостоятельного исследовательского поиска. Их решению может существенно помочь изучение двух следующих глав пособия.

Глава 3. Основная равносильность геометрии масс.

Среди классов нестандартных задач особо выделяется тот, который связан с геометрией масс. Лучшее пособие по этой теме написали Балк М. Б. и Болтянский В.Г. Геометрия масс. Серия: Библиотечка «Квант», М.: Наука, 1987 г. В нём рассмотрены задачи как с положительными и отрицательными, так и с комплексными массами, применение свойств момента инерции в решении геометрических задач

В данной главе предложены к рассмотрению краткий теоретический материал и некоторые задачи современных олимпиад, решаемые барицентрическим методом. В свое время, когда на математических боях Юга России кто-то из учеников приводил решение в терминах геометрии масс – это вызывало лишь молчаливое почтение со стороны их оппонентов. Истинную ценность такого решения могло оценить далеко не все.

§ 1. Правило Архимедова рычага.

Материальной точкой будим называть тело нулевого размера, обладающего определённой массой ***m*.** Причём масса, по определению, может быть как положительной, так и отрицательной. В геометрии масс материальную точку обозначают так: ***mA*.** Читают: материальная точка А, массой ***m*** .

Пусть на концах невесомого стержня сосредоточены две материальные точки ***mA*** и ***pB*.** Тогда положение центра масс ***Z*** этих материальных точек определяется правилом Архимедова рычага:

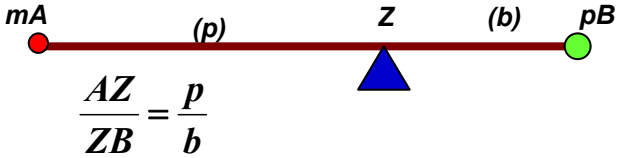


Рис. 22. Правило Архимедова рычага.

То есть, для положительных масс отношение расстояний материальных точек от центра масс обратно пропорционально массе этих материальных точек (м.т.). Или, по-русски: чем тяжелее м.т., тем ближе она к центру масс.

§ 2. Основные аксиомы геометрии масс.

Аксиома 1. Центр масс Z двух м.т. mA и pB однозначно определяется векторным равенством:

$$(m+p)\overrightarrow{OZ} = m\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}. \qquad (1)$$

Где O – произвольная точка пространства (в частности O может совпадать с Z).

Аксиома 2. Пусть Z – центр масс системы n материальных точек и эта система разбита на две подсистемы из k и t материальных точек ($k + t = n$) и пусть Z_1 и Z_2 – центры масс этих подсистем, тогда имеет место векторное равенство:

$$(m_1+m_2+...+m_k)\overrightarrow{OZ_1}+(p_1+p_2+...+p_t)\overrightarrow{OZ_2}=(\sum_1^k m_i+\sum_1^t p_j)\overrightarrow{OZ} \quad (2)$$

В переводе с русского на русский, аксиома 2 говорит о том, что центр масс всей системы м.т. может быть найден с помощью произвольной группировки любых подсистем м.т.
Таким образом, обе аксиомы вместе дают инструментарий для нахождения центра масс любой системы м.т. Чтобы читатели перестали, наконец, зевать от такого обилия сухой и не совсем ясной пока теории, самое время перейти к интересным примерам.

§ 3. Примеры применения геометрии масс.

Задание № 20. Точка пересечения медиан треугольника. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

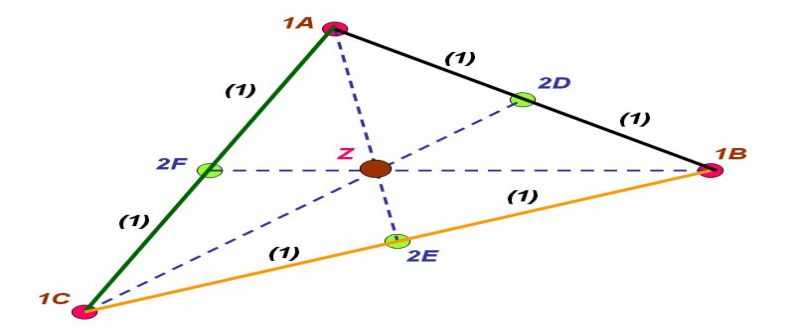


Рис.23. Центр масс треугольника

Рассмотрим систему трёх м.т. ***1A, 1B, 1C.*** Эта система имеет свой центр масс Z, который можно найти тремя способами.
Первый способ. Так как D – середина отрезка AB, то D – центр масс м.т. $1A$ и $1B$. Следовательно, Z – центр масс двух м.т. $1C$ и $2D$, тогда Z принадлежит медиане CD.
Второй способ. Так как E – середина отрезка CB, то E – центр масс м.т. $1C$ и $1B$.
Следовательно, Z – центр масс двух м.т. $1A$ и $2E$, тогда Z принадлежит медиане AE.
Третий способ. Так как F – середина отрезка AC, то F – центр масс м.т. $1A$ и $1C$. Следовательно, Z – центр масс двух м.т. $1B$ и $2F$, тогда Z принадлежит медиане BF.
Таким образом, все три медианы треугольника проходят через точку Z , то есть пересекаются в этой точке, что и требовалось доказать. Кроме того, по правилу Архимедова рычага, каждая из медиан точкой пересечения делиться в отношении 2 : 1, считая от вершины. Именно таким образом гениальный Архимед в своё время доказал оба этих факта и многое другое.

Задание № 21. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC и на продолжении стороны AC, за точку C, отмечены точки P, Q и R – соответственно, так, что имеют место соотношения:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{2};\ \frac{BQ}{QC}=\frac{7}{3};\ \frac{AC}{CR}=\frac{5}{2}.$$

Требуется доказать, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

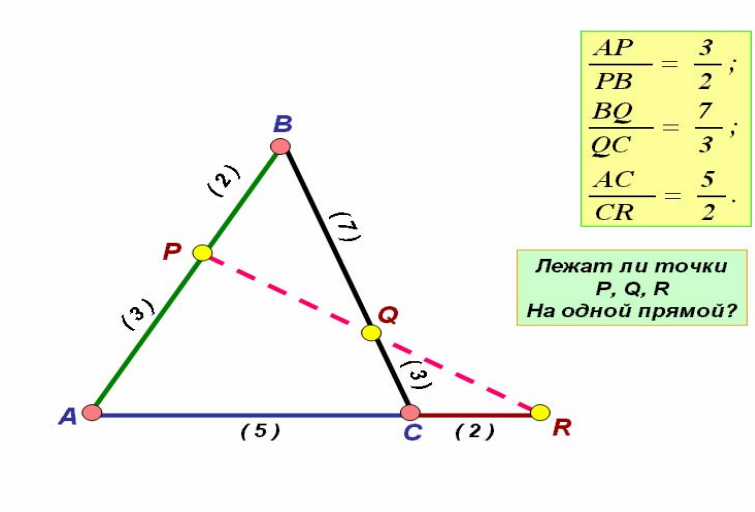


Рис. 24. Принадлежность трёх точек одной прямой.

Доказательство начнём с побора масс м.т. ***A, B*** и ***R*** так, чтобы точка ***C*** была центром масс м.т. ***aA*** и ***mR***, а точка ***P*** – центром масс м.т. ***aA*** и ***bB***. Это можно сделать, используя правило Архимедова рычага. Начнем с точек А и В. Так как, по условию ***AP / PB = 3/2***, то, если поместить в точку ***A*** массу ***2***, а в точку ***B*** массу ***3***, то точка ***P*** будет центром масс м.т. ***2A*** и ***3B***. В геометрии масс этот факт принято, в соответствии с формулой (1), кратко и наглядно записывать следующим образом: ***2A + 3B = 5P***. Подберём теперь массу ***m*** точки ***R*** так, чтобы точка ***C*** стала центром масс м.т. ***2A*** и ***mR***. Так как, по условию ***AC/CR = 5/2***, то, в соответствии с правилом архимедова рычага, должно выполняться равенство: ***2*5 = m*2,*** то есть ***m = 5***. После побора масс нужных материальных точек, приступаем к различным способам поиска центра масс системы этих м.т.

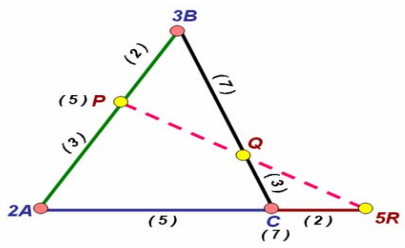


Рис. 25. Подбор масс материальных точек по заданному отношению длин отрезков.

Пусть ***Z*** – центр масс м.т. ***2A, 3B*** и ***5R***, тогда:

2A + 3B + 5R = 10Z;

2A + 3B = 5P, => 5P + 5R = 10Z, => Z є [PR].

2A + 5R = 7C, => 3B + 7C = 10Z, => Z є [BC].

BZ / ZC = 7/3 и, по условию, ***BQ / QC = 7/3, => Z = Q, => Q є [PR],*** что и требовалось доказать.

§ 4. Основная равносильность геометрии масс.

Рассмотренные примеры доказательств с использованием геометрии масс, при всей их простоте и наглядности, не всегда и не для всех представляются убедительными и обоснованными. Возможно, поэтому в литературе, посвященной олимпиадным задачам, барицентрический метод представлен незаслуженно малым количеством. И бывает очень странно видеть в уважаемых методических изданиях длинные, нудные, тяжеловесные доказательства аналогичных утверждений, к примеру, лишь на основе признаков подобия треугольников. Между тем, любое доказательство по методике геометрии масс легко переводиться на векторный язык, не

вызывающий в своей корректности никаких сомнений. В связи с этим представляется не лишним привести доказательство основной равносильности геометрии масс и, тем самым развеять все скептические сомнения.

Утверждение. Для любых трёх точек A, B и C и для любой точки O пространства, имеет место равносильность:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{m}{p} \Leftrightarrow p\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = (p+m)\overrightarrow{OC}. \quad (3)$$

Доказательство.

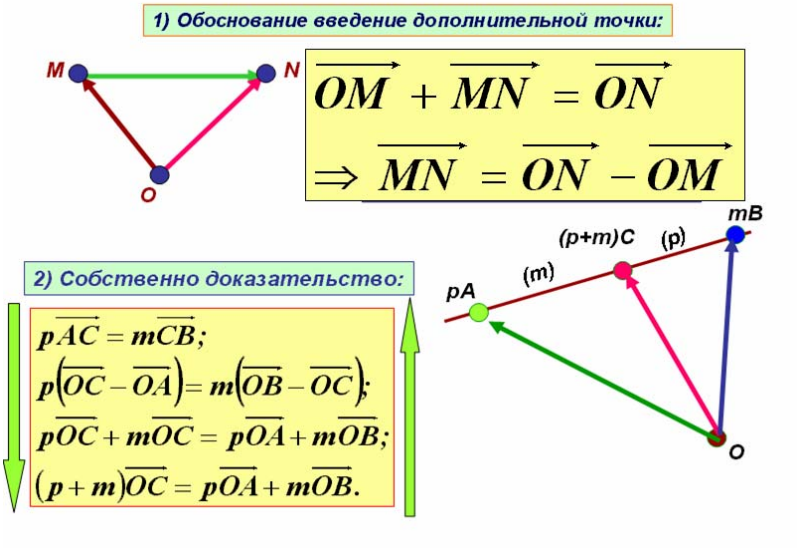


Рис. 26. Доказательство основной равносильности геометрии масс.

Фигурные стрелки показывают, что равносильные преобразования справедливы как по направлению «с верху в низ», так и в обратную сторону.

§ 5. Геометрия масс на Турнире Городов.

Отрадно отметить, в связи с вышеизложенным, что составители заданий Турнира Городов стараются не обделять вниманием геометрию масс. Одно из подтверждений этого факта в следующем задании осеннего тура 2007 – 2008 г.

Задание № 22. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закреплённый за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольной точке отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины отрезка равна сумме моментов гирь слева (иначе отклоняются в сторону, где сумма больше). Моментом гири называется произведение mS массы гири m на расстояние S от неё до середины. (29 Турнир Городов, осенний тур 2007 г., 10 – 11 кл.).

Столь обширное условие с подробнейшими пояснениями вполне можно рассматривать как введение в геометрию масс. Начнём рассуждения. Набор гирь – это, в идеальной модели – система материальных точек, имеющая единственный, чётко определяемый центр масс. Важно совместить центр масс системы с серединой отрезка (весов) и так, чтобы все точки были в

пределах отрезка. Эта задача решается достаточно просто с помощью центрального подобия (гомотетии).

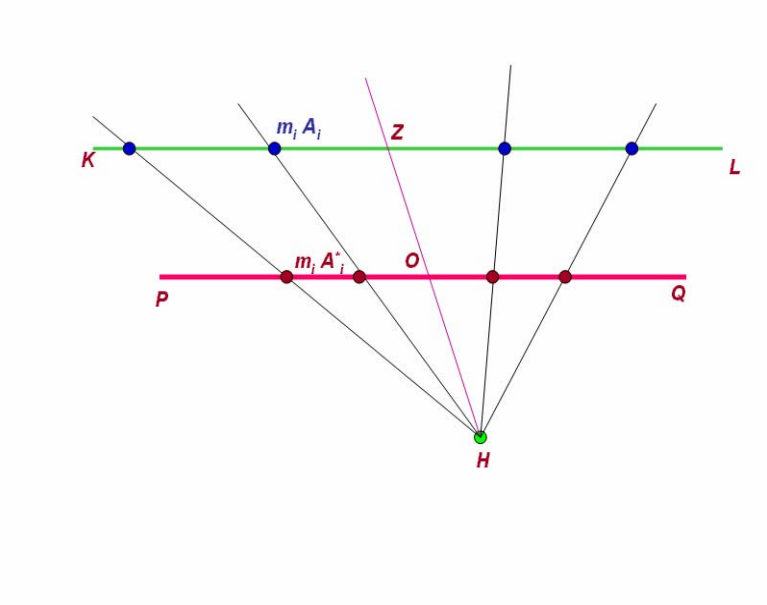


Рис. 27. Переброс материальных точек с произвольного отрезка на отрезок определённой длины с помощью гомотетии.

На рисунке 27 показано, что если вначале материальные точки находятся на произвольном отрезке ***KL,*** то, выбрав на прямой ***ZO*** точку ***H***, можно задать гомотетию, отображающую точки произвольного отрезка на соответствующие точки отрезка – весов нужной длины. Так как преобразование подобия сохраняет отношение длин соответствующих отрезков, то, если ***Z*** – центр масс системы м.т. на отрезке ***KL***, то ***O*** – центр масс системы м.т. отрезка ***PQ***. Положение центра масс однозначно вычисляется, в соответствии с надписями на гирьках, по формуле:

$$\overrightarrow{HZ} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{HA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3)$$

Затем производится взвешивание, и если весы не в равновесии, то надписи некоторых гирь не соответствуют их истинным весам. Это гарантировано единственностью центра масс у любой конечной системы материальных точек. И, в принципе, на этом решение, казалось бы, можно считать завершённым. Но попробуем мысленно стать на сторону виртуального оппонента, причём достаточно придирчивого. И вскоре обнаруживается «дырка». Оппоненту достаточно составить один простенький контрпример, для того, чтобы разрушить стройный ход рассуждений докладчика. В данном случае можно привести следующий рисунок.

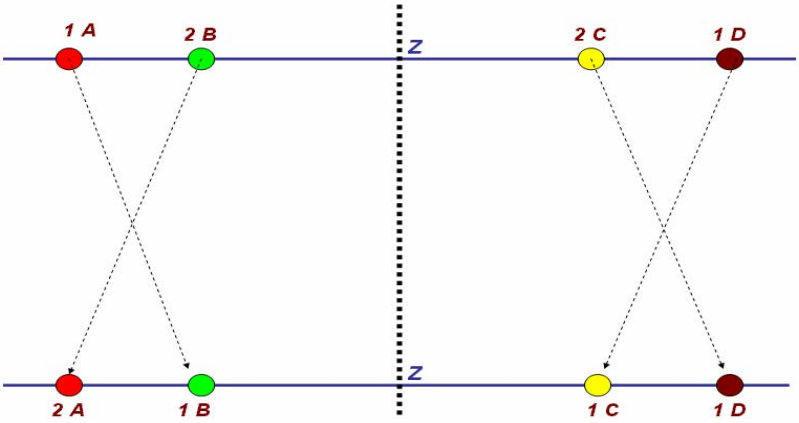


Рис. 28. Пример сохранения положения центра масс при изменении надписей.

Рисунок 20 без лишних слов иллюстрирует возможное сохранение равновесия системы относительно центра масс при изменении надписей. В том смысле, что центр масс, вычисленный по верхнему рисунку, совпадёт с центром масс, вычисленным по нижнему рисунку, но при этом истинные массы гирек могут быть неизменны. Залатать получившуюся «дырку» в решении можно, если придумать такой способ расстановки гирек, при котором ситуация на рисунке 20 не реализуема. Для этого можно расставить гирьки в порядке возрастания их записанных масс. Если среди гирек есть одинаковые по массе, то их ставят одну за другой по соседству.

Эвристические идеи, использованные в решениях задач данной главы:

- При решении некоторых геометрических задач можно использовать свойства центра масс системы материальных точек и различные методы его поиска;
- Методы геометрии масс можно применять там, где речь идёт об отношении длин отрезков, о принадлежности нескольких точек одной прямой, о принадлежности одной точки нескольким прямым;
- Всегда полезно мысленно становиться на сторону оппонентов Вашего решения и не бояться контрпримеров, которые помогают существенно уточнить цепочку рассуждений.

На этом и закончим главу о наглядном, увлекательном и, почему – то совершенно незаслуженно забываемом методе геометрии масс. Остаётся лишь надеяться, что читатели постараются использовать в решении соответствующих задачах этот замечательный метод из богатого наследия гениального Архимеда!

Глава 4. Краткий обзор некоторых классов олимпиадных задач.

При всём многообразии нестандартных олимпиадных задач по математике, можно выделить некоторые, часто встречающиеся классы таких задач. Их знание сразу даёт солидное преимущество участнику любой олимпиады. Деление нестандартных задач на классы в известной степени – условно. На практике одна задача может принадлежать двум или нескольким таким классам. Их лучше всего изучать на конкретных примерах .

§ 1. Задачи на делимость и целочисленность.

Этот класс задач предполагает знание основных признаков делимости, свойства деления с остатком, делимости суммы или произведения на число. Предположительная целочисленность решения резко сокращает область возможных вариантов поиска.

Рассмотрим один из примеров задания на делимость.

Задание № 23 . Докажите, что два натуральных числа a и b обладают следующим свойством: либо a, либо b, либо a + b, либо a – b делится на 3.

Пусть ни одно из двух чисел не делится на три. Тогда, при делении на 3 они либо дают равные остатки 1 или 2, либо разные остатки. В первом случае на 3 разделится их разность, во втором – их сумма. Возможна следующая символическая запись полученного решения.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3k+2\\ b=3m+2\end{cases}\Rightarrow a-b=3(k-m)\\ \begin{cases}a=3k+1\\ b=3n+1\end{cases}\Rightarrow a-b=3(k-n)\\ \begin{cases}a=3k+1\\ b=3m+2\end{cases}\Rightarrow a+b=3(k+m)+3=3(k+m+1)\end{array}\right.$$

К классу целочисленных задач относятся также так называемые Диофантовы уравнения. То есть уравнения с двумя переменными вида: $ax + by = c$ в которых и переменные и известные параметры являются целыми числами. Легко доказать, что если такое уравнение имеет хотя бы одно целочисленное решение, то оно имеет их бесконечное множество, которое можно выразить соответствующей формулой. Геометрически это означает, что если на прямой $ax + by = c$ с целыми коэффициентами лежит хотя бы одна точка $M(x_0 ; y_0)$ с целочисленными координатами, то точек с целочисленными координатами на этой прямой бесконечное множество. Приведём доказательство этого факта с выводом нужных расчётных формул.

$$\begin{cases}ax+by=c\\ ax_0+by_0=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(x-x_0)=-b(y-y_0)\\ x=x_0-bt\\ y=y_0+at\\ t\in Z\end{cases}$$

§ 2. Задачи на принцип Дирихле.

Принцип Дирихле (П.Г. Дирихле (1805 – 1859 гг.) – немецкий математик) иногда называют принципом ящиков. Если в n ящиках находится не менее $(n + 1)$ предметов, то найдётся такой ящик, в котором будет, по меньшей мере, 2 предмета. В шутливой форме можно сказать и так: если 6 кроликов рассаживаются по пяти клеткам, то обязательно найдётся клетка, в которой не менее 2 кроликов.

Более общая форма принципа Дирихле утверждает: если в n ящиках находится не менее $k*n + r$ предметов, то в каком – то из этих ящиков находится не менее $k + 1$ предмета.

В задачах на этот принцип важно понять, что имеется в виду под ящиками, а что под предметами.

Задание №24. В университете на 10 факультетах учатся 2008 студентов. Найдётся ли факультет с количеством студентов не менее 201?

Решение. Допустим от противного, что на каждом факультете менее 200 студентов. Но тогда во всём университете их должно быть не более 2000. Пришли к противоречию. Следовательно, найдётся факультет, на котором учатся не менее чем 201 студент.

Для большей солидности, приведём ещё один пример.

Задание № 25 . На отрезке [0 ; 1] числовой оси расположены четыре различные точки: a, b, c, d. Докажите, что на этом отрезке найдётся такая точка x, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{|x-a|}+\frac{1}{|x-b|}+\frac{1}{|x-c|}+\frac{1}{|x-d|}<40.$$

(16 Турнир Городов, весенний тур 1996г).

Решение. Четыре точки разбивают отрезок длинной 1 на 5 частей. Следовательно, найдутся две соседние точки, расстояние между которыми не менее 0,2. Пусть, к примеру это точки ***a*** и ***c***. Тогда выбираем $x = 0.5*(a + c)$, то есть среднее арифметическое чисел ***a*** и ***c***. Тогда:

$$|x-a| \geq 0.1 \Rightarrow \frac{1}{|x-a|} \leq 10$$

$$|x-c| \geq 0.1 \Rightarrow \frac{1}{|x-c|} \leq 10$$

$$|x-b| > 0.1 \Rightarrow \frac{1}{|x-b|} < 10$$

$$|x-d| > 0.1 \Rightarrow \frac{1}{|x-d|} < 10$$

Следовательно, условие задачи выполнено. Заметим лишь, что в решении использован геометрический смысл модуля: модуль разности равен расстоянию между соответствующими точками на координатной прямой.

§ 3. Логические задачи.

Задачи с рыцарями и лжецами – традиционные участники многих олимпиад. Для их решения естественно нужны логические рассуждения, доступные конечно не только математикам. Эти задачи формируют культуру доказательных рассуждений. А раздел «Математическая логика» подводит строго научную базу, обосновывающую многие интуитивные догадки. Основная идея поиска решений подобных задач заключена в том, что лгун не признает себя лгуном, а правдивец не может солгать. При всей очевидной простоте изначальных теоретических посылок, бывает не так просто сразу сообразить, каким путём будет найдено нужное решение. Эти задачи выгодно отличаются от многих других незаурядной непредсказуемостью.

Задание №26. Узнику было предоставлено право выйти на свободу, но только в том случае, если он справится с таким заданием: перед ним две двери, одна ведёт на волю, другая – дорога к смерти. Сидят два стражника: один из них – лгун, а второй всегда говорит правду; причём не известно кто из них кто. Задав лишь один вопрос, одному из стражников, узник должен определить дорогу на свободу. Какой вопрос нужно задать?

Ответ: Можно, например, задать такой вопрос, показав на конкретную дверь: «Твой товарищ сказал бы, что эта дверь ведёт на свободу?». Ответ «да» означает, что эта дверь не ведёт на свободу. На мой взгляд – очень красивое, остроумное решение!

§ 4. Задачи на взвешивание.

Этот класс нестандартных задач по популярности и рейтингу интереса не уступает задачам предыдущего параграфа. Примеров можно привести довольно много. С каждым годом организаторы придумывают всё новые вариации на данную тему. Соответственно решения могут усложняться. Но неизменной остаётся логика рассуждений и перебора возможных ситуаций. При этом могут возникать варианты – одинаковые с точностью до симметричной перестановки. Это существенно сокращает поиск. Но эти варианты должны быть распознаны заранее, иначе можно утонуть в море ложно различных сочетаний.

Задание №27. Есть 12 внешне одинаковых монет двух сортов, по 6 штук каждого сорта. За одно взвешивание про любую группу можно узнать, сколько в ней монет первого сорта.

Требуется за два взвешивания найти пару монет разного сорта. Какая именно монета первого сорта, а какая второго, выяснять не надо. (ЦРДО «Бернулли», г. Краснодар, 2007 г.).

Решение. Для удобства описания договоримся монеты первого сорта обозначать 1, а монеты второго сорта – 0. Предлагается взвесить сразу 8 каких – нибудь монет. С точностью до симметричной перестановки сортов, можно получить всего три существенно различных результата:

Вариант	***Результат***
1)	***11111100***
2)	***11111000***
3)	***11110000***

Будим считать, что взвешенные монеты отложены в зону А, не взвешенные (после 1-го взвешивания – в зону В). Рассмотрим решение в каждом из получившихся вариантах.

Вариант 1)	
Первое взвешивание. (Восемь любых монет)	
Зона А	***Зона В***
11111100	***0000***
Второе взвешивание. Две монеты из зоны А	
Возможный результат	***Выборы монет***
а) 10	***Выбор монет разного сорта сделан***
б) 00	***Берём одну из этих монет, она 2-го сорта, а вторую – любую, оставшуюся в зоне А, она 1-го сорта***
в) 11	***Берём одну из этих монет, а вторую – любую из зоны В***

Вариант 2)	
Первое взвешивание. Восемь любых монет.	
Зона А	***Зона В***
11111000	***1000***
Второе взвешивание. Две любых монеты из зоны В	
Возможный результат	***Выбор монет***
а) 10	***Выбор монет разного сорта сделан***
б) 00	***Тогда в зоне В остались две монеты разного сорта***

Вариант 3)	
Первое взвешивание. Восемь любых монет.	
Зона А	***Зона В***
11110000	***1100***
Второе взвешивание. Две любых монеты из зоны В	
Возможный результат	***Выбор монет***
а) 10	***Выбор монет разного сорта сделан***
б) 00	***Одну из этих монет и другую – оставшуюся в зоне В***
в) 11	***Случай, симметричный пункту б)***

§ 5. Задачи на раскраску и инварианты.

В этом классе олимпиадных задач для ответа на определённый вопрос помогает удачная раскраска либо клеток некоторой таблицы, либо точек некоторой области в разные цвета. Такое разделение по цветам часто бывает связано с некоторым свойством, которое сохраняется в некоторых состояниях системы, но может меняться в других. Такое свойство принято называть инвариантом. В зависимости от того, сохраняется или меняется инвариант, делается вывод о том способна или нет система перейти из одного состояния в другое. Рассмотрим простой, интересный пример.

Задание №28. Деревянный куб размером 3*3 условно разделен на 27 маленьких кубиков. Жук начинает прогрызать один из крайних угловых кубиков, двигаясь только параллельно рёбрам куба. Может ли жук прогрызть все кубики, побывав в каждом только один раз, и закончив путь в центральном кубике?

Решение. Раскрасим кубики в шахматном порядке. То есть так, чтобы любые два соседних имели разный цвет: один белый, другой – чёрный. Тогда, двигаясь по условию задачи, жук непременно должен проходить из кубика одного цвета – в кубик другого цвета. Чередование цвета при переходе из одного кубика в другой – инвариант данной задачи. Пусть жук начинает движение из кубика чёрного цвета. (См. рис. 29).

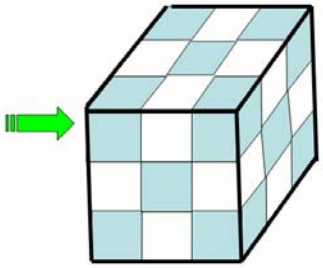


Рис 29. . Раскраска куба в шахматном порядке.

Составим таблицу смены цветов кубиков при движении жука.

№ кубика	*1*	*2*	*3*	*4*	*…*	*26*	*27*
Цвет кубика	*Ч*	*Б*	*Ч*	*Б*	*…*	*Б*	*Ч*

То есть последний 27 – й кубик должен быть черным, но по рисунку совершенно очевидно, что он – белый. Это противоречие говорит о том, что жук не сможет проделать путь, описанный в задании.

§ 6. Задачи на геометрическую интерпретацию.

О задачах этого класса уже упоминалось в предыдущих главах. Основной смысл поиска решения – это удачная замена аналитических выражений наглядными геометрическими образами. Для решения задач методом геометрической интерпретации нужно знать, в частности уравнения основных фигур в декартовых координатах. Кроме того, может понадобиться умение построения четвёртого пропорционального отрезка по данным трём отрезкам. Полезно также представлять себе аналитические соотношения между сторонами прямоугольного и других треугольников. Для

этого, в принципе, достаточно просто знать теоремы Пифагора и косинусов. Красивый вариант геометрической интерпретации представляет использование неравенства между модулем скалярного произведения двух векторов и произведением модулей этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}\right| \le \left|\overrightarrow{m}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|$$

Равенство имеет место в случае коллинеарности векторов.

Задание № 29 . Решите уравнение:

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Решение. Введём векторы:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{(2\ ;\ x)},\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\left(\sqrt{x-1}\ ;\ 5\right)}.$$

Тогда:

$$\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}\right| = 2\sqrt{x-1} + 5x \le \left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$$

Так как равенство возможно лишь для коллинеарных векторов, то имеем уравнение:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 5.$$

Проверка показывает, что это и есть корень исходного уравнения.

§ 7. Задачи, решаемые с помощью графов.

Случается, что в процессе поиска решения приходится обозначать точками некоторые элементы и соединять их линиями. Тогда мы невольно применяем, по крайней мере, самые простейшие понятия теории графов. Рассмотрим некоторые определения из этой теории.

Графом называется непустое множество точек, некоторые из которых соединены отрезками. При этом точки называются ***вершинами***, а соединяющие их отрезки – ***рёбрами*** графа.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина.

Вершина называются ***изолированной***, если она не принадлежит ни одному ребру.

Граф называется ***полным***, если каждые две различные вершины его соединены единственным ребром. Число рёбер полного графа, имеющего ***n*** вершин равно ***n(n – 1) / 2.***

Уже перечисленных сведений вполне достаточно для решения многих задач на теорию графов. Рассмотрим не самый сложный пример.

Задание № 30. В футбольном первенстве МЯЧЛАНДИИ изъявили желание участвовать сразу 2008 команд. Причем турнир решено провести так, что каждая команда встречается с каждой по одному разу. Может ли случится так, что в какой – то момент времени каждая из участвующих команд сыграет разное количество матчей?

А что такое всего ***2008*** команд?! Пусть их будет на много больше, к примеру, целых ***n***. Допустим в какой – то момент каждая из команд действительно сыграла по разному количеству матчей. Тогда, не нарушая общности, можно представить следующую таблицу.

Номер	***1***	***2***	***3***	***4***	***…***	***n***

команды						
Число сыгранных матчей	*0*	*1*	*2*	*3*	*…*	*n - 1*

Легко убедиться в том, что тогда общее число матчей, сыгранных на данный момент равно ***n(n – 1) / 2*** , то есть числу рёбер ***полного*** графа, содержащего ***n*** вершин. Но тогда откуда одна из них оказалась ***изолированной***? Следовательно, ситуации, описанной в задании не существует ни в ***МЯЧЛАНДИИ,*** ни в какой другой футбольной стране.

В предыдущей главе подробно рассмотрен класс заданий связанный с геометрией масс. Описания некоторых других классов содержаться в прилагаемой списке информационных ресурсов. Таким образом, из полного графа слагаемых успешного решения математических олимпиадных заданий (см. введение,с 8, рис. 1 или Пр.1.ppt), остаётся самое главное – собственный исследовательский поиск! Автор приводит сравнительно не большой список заданий из своей коллекции. Эта подборка обусловлена личными взглядами на рассматриваемую тему и, поэтому, возможно, является несколько ограниченной и субъективной. Но этот пробел интересующиеся читатели с лихвой заполнят, используя материалы из списка литературы, из Интернета и из других информационных источников. Сейчас, Слава Богу, нет недостатка в олимпиадных задачах по любым предметам, на любой вкус и уровень.

Задания для самостоятельного исследовательского поиска.

№ 1. На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие – местное. Минимальное расстояние между концами

часовых стрелок этих часов равно m, максимальное равно M. Найдите расстояние между центрами часов. (12-й Турнир Городов, осенний тур, 10-11 кл.)

№ 2. Окружность с центром в начале координат O проходит через точки A(4;3) и B(-3;4). Найдите на окружности такую точку M, чтобы вектор $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}$ ***имел наибольшую длину.*** («Юный техник» № 12, 1983 г. Одна из задач вступительного экзамена в ЗФТШ).

№ 3. Даны два круга (см. рисунок 30) и AB параллельна CD, AB = 24 см. Чему равна площадь зарисованной части? (Из серии «Квант для младших школьников»).

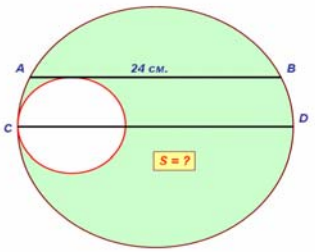


Рис. 30.

№ 4. Докажите равенство двух углов, показанных на рисунке 31. (Из серии «Квант для младших школьников»).

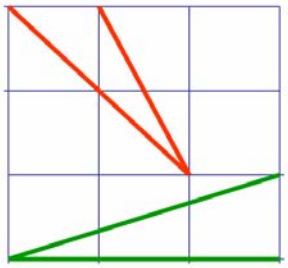


Рис. 31.

№ 5. Кто построить сможет с блеском треугольник из отрезков, пару точек и квадрат – тот поступит на МЕХМАТ!!! Ну, а если более серьёзно, постройте график уравнения:

$$\left(\left(\left[0.5x\right]-1\right)^2+y^2\right)\left(\left(y-x+2\right)^2+\left(\left[0.5x\right]\right)^2\right)\left(\left(y+x+2\right)^2+\left(\left[-0.5x\right]\right)^2\right)\times$$
$$\times\left(\left(|x|-2\right)^2+\left(y-2\right)^2\right)\left(|x|+|y|-5\right)=0.$$

№ 6. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8*8, чтобы в любых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в любых двух строках – различным? (Олимпиада Юга России – 1996 г., 8 кл.)

№ 7. Докажите, что в тетраэдре отрезки, соединяющие вершины с точкой пересечения медиан противоположной грани и отрезки, соединяющие середины скрещивающихся рёбер имеют общую точку. Найдите, в каком отношении делятся соответствующие отрезки их общей точкой.

№ 8. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

№ 9. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Выразите отношения, в которых делятся биссектрисы их точкой пересечения.

№ 10. Докажите теорему Чевы: Если на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены соответственно точки P, Q и R , то прямые AQ, BR и CP (их называют чевианами) пересекаются в одной точке тогда, и только тогда, когда выполняется векторное равенство:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1 .$$

№ 11. Докажите теорему Менелая: Если на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены соответственно точки P, Q и R , то эти точки лежат на одной прямой тогда, и только тогда, когда выполняется векторное равенство:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1.$$

№ 12. а) Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 30^0. Из этого угла по медиане к противоположной стороне выпущен шар (материальная точка). Докажите, что после восьми отражений от бортов шар попадёт в лузу, находящуюся в вершине угла 60^0. (4 Турнир Городов, март 1983г.);
б) Изобразите маршрут движения шара и докажите, что существуют две точки, через которые проходят три отрезка этого маршрута. (Личное авторское дополнение).

№ 13. Найдите все такие пары натуральных чисел (a; b) , что число 3a+2 делится на b +1, а число 3b + 2 делится на a + 1.

№ 14. Решите в натуральных числах уравнение xy – 3x – 5x = 0.

№ 15. Докажите, что для любого натурального числа n, число

$$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

тоже натуральное.

№ 16. Найдите все целые x, для которых $(8x^3 - 12x^2 + 6x - 217)$ – простое число.

№ 17. Решите в натуральных числах уравнение

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7} .$$

№ 18. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

№ 19. Решите уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

№ 20. Докажите, что

$$\cos 18^{o}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{c}},$$

где a, b и c – натуральные числа.

№ 21. Круг поделили хордой AB на два сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. При этом точка B перешла в точку B^*. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BB^*, перпендикулярны друг другу.

№ 22. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{W}+\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{WXYZ}=0$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах.

№ 23. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC с углом 20° при вершине A отложен отрезок AD, равный основанию BC. Найдите угол BCD.

№ 24. Дан треугольник ABC, H – точка пересечения его высот. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, AHC, AHB и CHB имеют равные радиусы.

№ 25. Найдите решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2t \\ t^2+1=2x \end{cases}$$

№ 26. В королевстве ОСТРОЗУБИИ любые два человека отличаются набором зубов. Максимальное количество зубов 32. Найдите максимально возможное число жителей королевства.

№ 27. Найдите сумму $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots + nx^{n-1}$.

№ 28. Клетки прямоугольника 5*41 раскрашены в два цвета. Можно ли выбрать три строки и три столбца так, чтобы все 9 клеток, находящиеся на их пересечении были одного цвета?

№ 29. Пусть $x = \sin 18^{o}$. Докажите, что $4x^2 + 2x = 1$.

№ 30. В городе Буле некоторые жители – лжецы, и они всегда лгут, а все остальные всегда говорят правду. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей этого города, и трое из них сказали следующее:

- Нас тут не больше трёх человек. Все мы – лжецы.
- Нас тут не более четырёх человек. Не все мы лжецы.
- Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.
Определите, сколько человек в комнате и сколько из них лжецов?

№ 31. В банде 101 террорист. Все вместе они в вылазках никогда не участвовали, а каждые двое встречались в вылазках ровно по разу. Докажите, что найдётся террорист, который участвовал не менее чем в 11 вылазках.

№ 32. Муравей ползёт по проволочному каркасу куба. При этом он никогда не поворачивает назад. Может ли он побывать в одной из вершин куба 25 раз, а в остальных по 20?

№ 33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8 \end{cases}$$

№ 34. Лидер общественного движения «АЛГЕБРОЛЮБЫ» предлагает ввести новую операцию:

$$m \otimes n = \frac{m+n}{mn+4}$$

Чему тогда равно значение выражения:

$$((\ldots((30 \otimes 29) \otimes) \otimes) \otimes \ldots \otimes 2) \otimes 1)?$$

№ 35. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий одним из своих корней число, равное $\sin 15^0$.

№ 36. Плоскость покрыта квадратной решёткой. Можно ли через любой узел провести прямую не проходящую больше ни через один узел решётки?

№ 37. В каждой клетке доски 5*5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

№ 38. Муха вылетает из одного города в другой со скоростью 1 метр в секунду. Расстояние между городами 2500 километров. Муха удваивает скорость после каждого метра пути. Оцените время полёта мухи.

№ 39. В математический КВН играют команды двух школ. Соревнование состоит из нескольких конкурсов. За победу в конкурсе команда получает три балла, за ничью – два, и за поражение – один утешительный балл. С каким счётом могли и с каким не могли закончится соревнования: 23:20, 17:17, 24:16, 17:15?

№ 40. В соревновании двух команд, состоящем из нескольких туров, в каждом из которых команда за победу получает три очка, за ничью – два очка, и за поражение – одно очко, итоговый счёт оказался равным 17:15. Сколько победных, ничейных и проигрышных туров могло быть у победителей?

№ 41. На столе лежат две кучи конфет, в первой – 12, а во второй – 13. Мальчик и девочка играют в такую игру: за ход разрешается либо съесть 2 конфеты из одной кучи, либо переложить 1 конфету из первой кучи во вторую. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Мальчик, по джентельменски уступает право первого хода – даме! Сможет ли он выиграть?

№ 42. Найдите все пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, такие, что a и b – оба корня второго трёхчлена, c и d – оба корня первого трёхчлена.

№ 43. Взяли два натуральных числа a и b. Оказалось, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что a = b.

№ 44. Барон Мюнхаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могло ли такое произойти?(Отражение шара от борта происходит по правилу: «угол падения равен углу отражения).

№ 45. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил их сумму на их произведение. После этого Незнайка стёр самое маленькое число и поделил сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в три раза больше первого. Какое число стёр Незнайка?

№ 46. Лидер партии «Новая Геометрия» предложил ввести следующую формулу для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости:

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

$$\rho(A; B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Чем в такой геометрии является «новый серединный перпендикуляр» к отрезку AB, если A(1;3), B(3;7)?

№ 47. Миша стоит в центре круглой лужайки радиуса 100 м. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 м. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент выйти с лужайки или Катя всегда сможет ему помешать?

№ 48. Дана функция, обладающая следующим свойством:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x; y \in Q.$$

Известно, что f(10) = - π. Найти f(-2/7).

№ 49. В письменности антиподов числа тоже записываются цифрами 0, 1, 2, …, 9, но при этом каждая из цифр у них и у нас имеют разные значения. Оказалось, что у антиподов тоже верны равенства: 5*8 + 7 + 1 = 48, 2*2*6 = 24, 5*6 = 30. Как продолжит равенство 2^3 = … грамотный антипод? Что означает у антиподов цифра 9?

№ 50. Найдите все целые x и y, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{2x-3y+1}} + \frac{1}{\sqrt{y-x+2}} + \frac{1}{\sqrt{2y-x}} = 3.$$

Ответы, указания.

№ 1. ***(M+m) / 2.*** Можно применить метод вращающегося вектора (см. Гл. 2).

№ 2. $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$. Вращающийся вектор.

№ 3. ***144π***. Принцип удачной переформулировки. Совместите центры кругов.

№ 4. Воспользуйтесь равенством двух углов, вписанных в одну окружность.

№ 5. Что должно получиться сказано в условии. Изучите аналогичную задачу из Гл. 2.

№ 6. Такая расстановка возможна. Одно из решений приведено в следующей таблице, где шашки закодированы цифрой 1:

							1
						1	1
					1	1	1
1	1	1	1	1			
1	1	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1

№ 7. Найдите центр масс точек ***1A, 1B, 1C, 1D.*** Где ***A, B, C, D*** – вершины тетраэдра.

№№ 8; 9. Воспользуйтесь тем, что биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам и докажите, что точка пересечения биссектрис совпадает с центром масс материальных точек ***aA, bB, cC.*** Пусть $J \in [AA_1]$, тогда:

$$\frac{AJ}{JA_1}=\frac{b+c}{a}.$$

№№ 10; 11. Поместите в вершины треугольника массы в соответствии с заданным отношением отрезков. Найдите центр масс получившихся материальных точек и воспользуйтесь его свойствами.

№ 12 а). Воспользуйтесь свойством упругого соударения шара о стенки бильярда: угол падения равен углу отражения. В месте удара шара о стенку стройте прямоугольный треугольник, симметричный данному, относительно этой стороны. Тогда весь маршрут можно спрямить в отрезок прямой. В соответствии с идеями геометрии масс можно рассчитать, в каком отношении точки ударения делят любую из сторон. Для удобства изображения всего маршрута можно больший катет разделить на 35 равных частей, меньший катет на 6, а гипотенузу на 12 равных частей. Маршрут начинается в вершине ***A,*** заканчивается в вершине ***B*** и имеет восемь точек столкновения со стеками: $M_1, M_2, \ldots M_8$. Положения этих точек на соответствующих сторонах отвечает следующим отношениям длин отрезков:
$CM_1 : M_1B = 1;\ BM_2 : M_2A = 4 : 8\ ;\ AM_3 : M_3C = 20 : 15;\ AM_4 : M_4B = 1;\ AM_5 : M_5C = 28 : 7\ ;\ CM_6 : M_6B = 2 : 4;\ BM_7 : M_7A = 3 : 9;\ AM_8 : M_8C = 30 : 5.$
б) В одной из точек пересекаются отрезки $M_8B,\ M_6M_7\ ,\ M_1M_2$, в другой – отрезки $AM_1,\ M_2M_3\ ,\ M_4M_5$. Для доказательства можно применить теоремы Менелая и Чевы.

№ 13. ***(1;4), (3;10), (4;6), (4;1), (10;3), (6;4).***

№ 14. ***(6;18), (8;8), (10;6), (20;4).***

№ 15. Приведите дроби к общему знаменателю, числитель разложите на множители, сделайте вывод.

№ 16. При $x = 4, p = 127.$ Выделите полный куб.

№ 17. $x = 1, y = 2, z = 3.$

№ 18. $9.$ Избавление от иррациональности в знаменателе.

№ 19. $2, 5; \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Замена переменной по формуле: $x^2 - 5x = t.$

№ 20. $\cos 18^o = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Возьмите правильный 5-угольник с центром в начале координат и одной из вершин – на оси абсцисс. Сумма пяти векторов с общим началом в начале координат и концами – в вершинах пятиугольника равна нуль-вектору.

№ 21. Можно воспользоваться координатным методом. Сегменты лучше заменить соответствующими им равнобедренными треугольниками. Заменить отрезки векторами, координаты которых можно выразить и найти скалярное5 произведение этих векторов.

№ 22. Можно воспользоваться равенством: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

№ 23. 70°. Постройте внутри треугольника ABC равносторонний треугольник со стороной BC.

№ 24. Точка H^*, симметричная точке H относительно прямой AC лежит на окружности, описанной около треугольника ABC!

№ 25. $x = y = z = t = 1.$ Примените неравенство Коши: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

№ 26. 2^{32}. Можно начать с максимального числа зубов, равного 4 и сделать индуктивное обобщение.

№ 27.
$$S(x) = F'(x), \quad F(x) = x + x^2 + \ldots + x^n.$$
$$S = \frac{nx^{n+1} + (n+1)x^{2n+1}}{(x-1)^2}.$$

№ 28. Можно. Для доказательства трижды используйте Принцип Дирихле (Гл. 4.).

№ 29. Для вычисления синуса 18^0 можно воспользоваться равнобедренным треугольником с углом при вершине 36^0, построив внутри исходного треугольника ему подобный. Можно также использовать решение задачи № 20.

№ 30. В комнате четверо, из них двое лжецов.

№ 31. По принципу Дирихле, найдётся вылазка, состоящая не менее, чем из 11 человек…!

№ 32. Нет, не может. Раскрасьте вершины куба в два цвета так, чтобы концы любых двух рёбер были разноцветными.

№ 33. Приметите геометрическую интерпретацию, заменив переменные отрезками, из которых можно сложить прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 и гипотенузой 10. Далее останется лишь использовать подобие треугольников. Ответ: ***(0.6;1.2;1.8;2.4).***

№ 34. Обозначьте через ***y*** результат «предпредпоследней» операции и выразите через него число ***x*** – результат предпоследней операции. Остаётся сделать правильный вывод и получить ответ: 1/3.

№ 35. $16x^4 - 16x^2 + 1.$

№ 36. Можно. Выясните, к примеру, пройдёт ли прямая $y = \sqrt{3}x$ через какой-нибудь узел решётки, отличный от начала координат?

№ 37. Раскрасьте клетки доски в два цвета в шахматном порядке. Тогда каждый жук при описанном переходе попадёт в клетку нового цвета. Клеток - нечётное число. Какой можно сделать вывод?

№ 38. Первый метр пути муха пролетает за время $t_1 = 1$ *с,* второй метр за время $t_2 = ½$ *с* , …, $t_n = 1/(2^{n-1})$ *с.* Общее время полёта равно сумме 2500000 членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $t_1 = 1$ *с* и знаменателем $q = 0.5.$ Поэтому:

$$T \approx T_\infty = \frac{t_1}{1-q} = \frac{1}{1-0.5} = 2 \quad c.$$

Таким образом, полёт мухи не превышает двух секунд!

№ 39. Общая сумма баллов двух команд за тур равна 4. Поэтому сумма баллов общего счёта должна быть крана 4.

№ 40. Пусть победители выиграли ***x*** туров, сыграли в ничью в ***y*** турах, и проиграли – в ***z*** турах. Тогда, по условию задачи можно составить следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 17 \\ x + y + z = 8 \\ x, y, z \in N_0 \end{cases}$$

Система имеет следующие решения: ***(1;7;0), (2;5;1), (3;3;2), (4;1;3).***

№ 41. Да, сможет, причём при любой стратегии девочки.

№ 42. Ответ: а) $x^2 + ax,\ x^2 - ax,\ a \in R,$ б) $x^2 + x - 2,\ x^2 + x - 2.$

№ 43. Можно воспользоваться неравенством:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, a > 0, b > 0.$$

№ 44. Да, могло! Вы найдёте несколько возможных маршрутов, если разделите исходный правильный треугольник на девять равных между собой треугольников, подобных данному.

№ 45. Незнайка записал числа 4, 5 и 7, и затем стёр 4.

№ 46. В «новой геометрии» серединным перпендикуляром будет ломаная линия ***l,*** определяемая формулой:

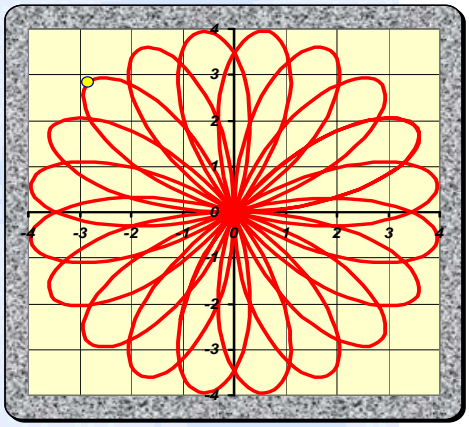
$$l: \begin{cases} y = 6, x \le 1 \\ y = 7 - x, 1 < x \le 3 \\ y = 4, x > 3 \end{cases}$$

№ 47. Миша всегда сможет покинуть круг на определённом шаге, если каждый шаг, начиная со второго будет делать в направлении перпендикулярном отрезку, соединяющему центр круга и точку, в которой он на данный момент находится.

№ 48. Можно доказать, что $f(x) = -0.1\pi x$. Тогда: $f(-2/70 = \pi / 35$.

№ 49. Грамотный антипод продолжит запись также, как и мы : $2^3 = 8$. А вот цифра 9 у них – это наш ноль. Задачу можно решить достаточно длинным но не сложным перебором вариантов, методом исключений.

№ 50. Построив в координатной плоскости область определения данного уравнения, легко убедиться в том, что она содержит единственную точку с целочисленными координатами ***(3;2).*** Непосредственная подстановка этих координат в уравнение убеждает в том, что это и есть его целочисленное решение.



ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ.

1. Балк М. Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. Серия: Библиотечка «Квант», М.: Наука, 1987. – 206 с.

2. Барсуков Е.Г. Необычная математика: хитрые задачи для школьников всех возрастов. – М: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2007. – 88 с. (Серия «Школьный корабль»).

3. Гаврилова Т. Д. Занимательная математика . 5-11 классы. (Как сделать уроки математики нескучными). – Волгоград: Учитель, 2006. – 90 с.

4. Заболотнева Н.В. Олимпиадные задания по математике. 5-8 классы. 500 нестандартных задач для проведения конкурсов и олимпиад: развитие творческой сущности учащихся. – Волгоград: Учитель, 2007. – 99 с.

5. Кортукова Л.К., Теплов А.А. Сборник олимпиадных заданий для учащихся 8-11 классов. Математика. Физика. Астрономия. Биология. Экология. Химия. География.: Практическое пособие. – М.: АРКТИ, 2006. – 128 с. (Школьное образование).

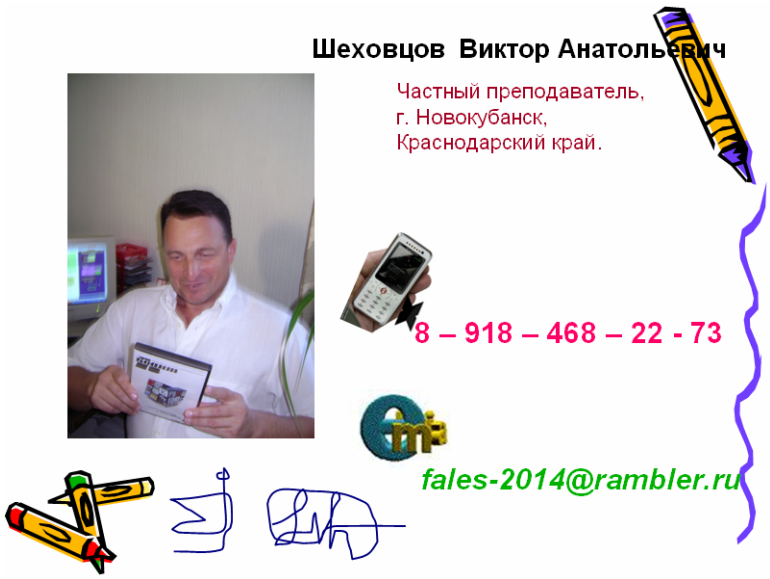
6. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач (Методическое пособие). – Киев: Агрофирма «Александрия», 1993 г. – 60 с.

7. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в 5-8 классах: пособие для учителя. – Львов: журнал «КВАНТОР», 1991 г. – 96 с.

8. Шеховцов В.А. Математика для абитуриентов и студентов. Учебно-методическое пособие. – Новокубанск. Н.Ф. Куб. ГАУ. – 2003 г. 123 с.

9. ***info@uchitel-izd.ru*** **–** Сайт издательства «УЧИТЕЛЬ» г. Волгоград;

10. ***turgor24@yandex.ru*** – электронный адрес Центрального жюри Международного Математического Турнира Городов;

11. ***http://crdo-bernoulli.kubannet.ru*** **–** сайт Центра развития дополнительного образования им. Бернулли, г. Краснодар.

12.